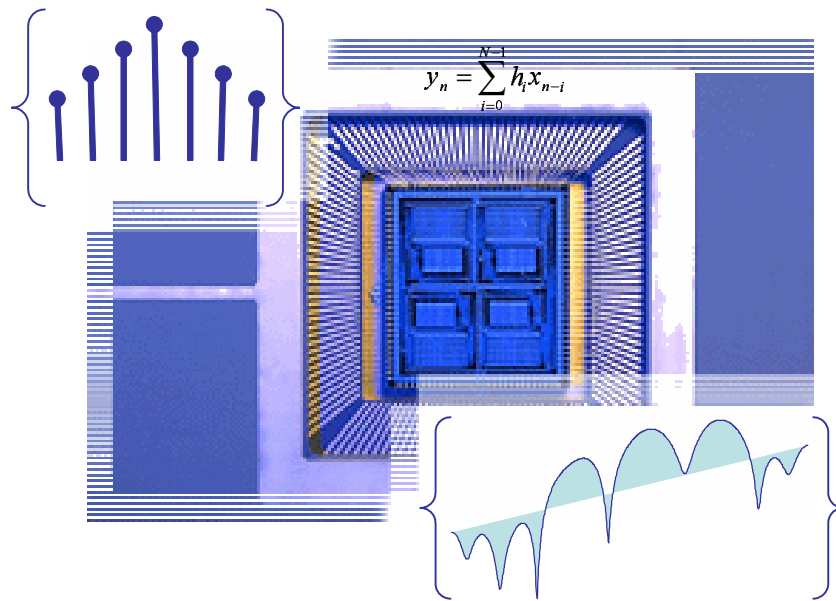


## Signaux et Systèmes Discrets



Olivier Sentieys

ENSSAT - Université de Rennes 1

sentieys@enssat.fr

<http://www.irisa.fr/R2D2>

6 Rue de Kerampont - BP 447

22305 LANNION - France



UNIVERSITE DE RENNES 1

IRISA — ENSSAT

Institut de Recherche en Informatique et Systèmes Aléatoires

École Nationale Supérieure de Sciences Appliquées et de Technologie

Technopôle Anticipa Lannion





# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
Remarques sur la notation . . . . .	4
Utilisation de Matlab et Scilab . . . . .	4
Signaux et systèmes . . . . .	5
Classification des signaux . . . . .	6
Dimensionnalité . . . . .	6
Caractéristiques temporelles . . . . .	6
Valeurs prises par le signal . . . . .	7
Prédictibilité des signaux . . . . .	7
<b>1 Signaux déterministes à temps discret</b>	<b>9</b>
1.1 Introduction . . . . .	9
1.2 Impulsion unité ou impulsion de Kronecker . . . . .	9
1.3 Échelon unité . . . . .	10
1.4 Signal exponentiel causal . . . . .	10
1.5 Signal rectangulaire causal de durée $N$ ou porte . . . . .	10
1.6 Signal sinusoïdal de période $N$ . . . . .	11
1.7 Signal complexe . . . . .	11
1.8 Cas général : signal échantillonné non impulsionnel . . . . .	11
1.9 Propriétés des signaux à temps discret . . . . .	11
<b>2 Transformation en <math>Z</math></b>	<b>13</b>
2.1 Définition de la transformée en $Z$ . . . . .	13
2.1.1 Exemples de transformée en $Z$ . . . . .	14
2.1.2 Description générale d'une région de convergence . . . . .	16
2.2 Propriétés de la transformée en $z$ . . . . .	18
2.2.1 Linéarité . . . . .	18
2.2.2 Théorème du retard . . . . .	18
2.2.3 Théorème de l'avance . . . . .	18
2.2.4 Facteur d'échelle en $z$ . . . . .	19
2.2.5 Inversion de l'axe temporel . . . . .	19
2.2.6 Dérivation dans l'espace en $z$ . . . . .	19
2.2.7 Théorème de la valeur initiale . . . . .	20
2.2.8 Théorème de la valeur finale . . . . .	20
2.2.9 Théorème de la valeur intermédiaire . . . . .	21
2.2.10 Théorème de la sommation . . . . .	21

2.2.11	Théorème de la convolution linéaire discrète . . . . .	21
2.3	Transformées en $Z$ rationnelles . . . . .	22
2.3.1	Définition des pôles et des zéros . . . . .	22
2.3.2	Fonction de transfert d'un système linéaire invariant . . . . .	23
2.4	Transformée en $Z$ inverse . . . . .	23
2.4.1	Transformée inverse par intégration et méthode des résidus . . . . .	24
2.4.2	Transformée inverse par division polynômiale . . . . .	26
2.4.3	Transformée inverse par décomposition en fractions rationnelles . . . . .	27
2.5	Transformées en $Z$ et en $Z$ inverse de fonctions usuelles . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Transformée de Fourier d'un signal discret</b>	<b>29</b>
3.1	Rappels sur les signaux continus . . . . .	29
3.2	Signaux discrets non périodiques . . . . .	30
3.3	Signaux discrets périodiques . . . . .	31
3.4	Conditions d'existence de la transformée de Fourier . . . . .	32
3.5	Propriétés de la transformée de Fourier . . . . .	35
3.6	Densité spectrale d'énergie . . . . .	37
3.7	Échantillonnage du domaine Fréquentiel . . . . .	37
3.8	Transformée de Fourier Discrète . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Systèmes discrets</b>	<b>41</b>
4.1	Introduction . . . . .	41
4.2	Systèmes linéaires invariants . . . . .	41
4.2.1	Représentation d'un signal . . . . .	42
4.2.2	Système linéaire invariant . . . . .	43
4.2.3	Stabilité . . . . .	44
4.2.4	Causalité . . . . .	46
4.3	Représentation temporelle des systèmes discrets . . . . .	46
4.3.1	Produit de convolution . . . . .	46
4.3.2	Equation aux différences finies . . . . .	47
4.3.3	Fonction de transfert . . . . .	47
4.4	Analyse des systèmes discrets par la transformée en $Z$ . . . . .	49
4.4.1	Réponse d'un système décrit par une fonction rationnelle . . . . .	49
4.4.2	Régimes transitoires et permanents . . . . .	50
4.4.3	Condition de causalité pour $H(z)$ . . . . .	50
4.4.4	Condition de stabilité pour $H(z)$ . . . . .	50
4.4.5	Détermination du module et de la phase du système . . . . .	50
4.5	Représentation fréquentielle des systèmes discrets . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Échantillonnage et reconstruction des signaux</b>	<b>53</b>
5.1	Échantillonnage idéal . . . . .	53
5.2	Exemple pratique d'échantillonnage . . . . .	55
<b>6</b>	<b>Travaux Dirigés en signaux et systèmes discrets</b>	<b>57</b>
6.1	Échantillonnage . . . . .	57
6.1.1	Chaîne de traitement numérique du signal . . . . .	57
6.1.2	Échantillonnage d'un signal . . . . .	58

6.1.3	Échantillonnage idéal . . . . .	58
6.1.4	Échantillonnage naturel ou avec blocage . . . . .	58
6.1.5	Reconstitution . . . . .	58
6.2	Transformée en $Z$ . . . . .	59
6.2.1	Calculs de $TZ$ . . . . .	59
6.2.2	Signal exponentiel . . . . .	59
6.3	Transformée en $Z$ inverse . . . . .	59
6.3.1	Systèmes linéaires discrets . . . . .	60
6.3.2	Filtre numérique . . . . .	60
6.4	Transformée de $\mathcal{F}$ ourier d'un signal discret . . . . .	60
6.4.1	Calcul de $T\mathcal{F}$ . . . . .	61
6.4.2	Transformée de $\mathcal{F}$ ourier Discrète . . . . .	61
6.5	Analyse spectrale . . . . .	62
6.5.1	Exercice 1 . . . . .	62
6.5.2	Exercice 2 . . . . .	62



# Introduction

Le traitement numérique du signal est une notion qu'il n'est pas facile de définir simplement étant donné le nombre important d'applications relevant de cette discipline. En première approximation, on peut tout d'abord tenter d'expliquer chacun des mots de cette expression. *Traitement* signifie que l'on est en présence d'un processus de séquençage d'opérations programmées. Une séquence d'opérations s'applique ici à une suite de données *Numériques* qui vont représenter sous une forme discrète un paramètre variable, ou *Signal*, qui le plus souvent est extérieur au processus de traitement.

Il s'agit donc d'appliquer un traitement ou une analyse de l'information à une séquence de nombres discrets qui représente un signal provenant pour la majorité des applications du monde physique qui nous entoure.

Le traitement numérique d'un signal nécessite un support matériel permettant d'effectuer le traitement de l'information, ce peut-être du matériel électronique spécifique à une tâche particulière ou du matériel moins spécialisé comme peut-l'être un ordinateur.

Il faut pouvoir communiquer entre le monde physique extérieur et le processus par lequel s'effectue le traitement ; le signal extérieur, s'il est défini sur un support continu, doit être représenté sous une forme discrète. Cela veut dire que l'on accepte de perdre de l'information : entre deux valeurs consécutives et discrètes du signal nous faisons l'hypothèse de ne disposer d'aucune autre information. Nous verrons qu'une analyse du problème à traiter permet de définir correctement ce qui est conservé ou non dans la forme numérique d'un signal.

Il faut bien sûr définir la séquence des opérations qui transforme le signal numérique. Cette opération correspond à un objectif de traitement bien précis, par exemple supprimer l'écho des lignes téléphoniques, reconnaître une signature radar, etc...

Le développement de l'électronique permet le traitement du signal analogique ; un signal électronique *analogique* suit continuellement le signal physique qui lui est relié via un capteur. C'est le développement des calculateurs numériques qui a conduit à l'essor du traitement numérique du signal. C'est en effet une approche souple - les traitements correspondent à des logiciels, les supports matériels sont polyvalents -, les états discrets d'un calculateur sont stables - ce n'est en effet pas le cas des systèmes analogiques fortement sensibles aux dérives dues par exemple aux conditions de température ou aux problèmes de vieillissement -. Cependant, l'approche numérique peut se révéler parfois complexe pour des applications très simples. La quantité d'information pouvant être traitée est corrélée à la vitesse de calcul ; la réalisation d'un traitement sous forme analogique ira toujours plus vite que par une forme numérique avec un calculateur et du logiciel.

En conclusion, le traitement du signal peut se résumer dans les actions suivantes :

1. **Modéliser** – ou identifier – consiste en l'analyse d'un signal ou d'un système, dans le

domaine temporel ou fréquentiel (i.e. spectral). On parlera également d'estimation.

2. **Synthétiser** – ou générer – un signal.
3. **Transmettre** un ensemble de signaux sur un support.
4. **Transformer** un ensemble de signaux à l'aide d'un système linéaire (filtrer, moduler, coder, ...) ou non linéaire ( $()^2$ ,  $|$ , ...).

## Remarques sur la notation

Dans la suite du document, on notera par  $f$  la fréquence en Hz,  $f_e$  la fréquence d'échantillonnage,  $T$  la période d'échantillonnage et  $\omega = 2\pi f$  la pulsation en rad/s. Pour des raisons de simplicité d'expression, on peut faire abstraction de  $T$  si on sait que toutes les grandeurs utilisées seront relatives à  $T$  ou  $f_e$ .

Pour ces raisons, on peut utiliser dans le domaine fréquentiel, la variable  $\Omega = 2\pi f.T = 2\pi f/f_e$  appelée pulsation relative. Un filtre numérique exprimé selon la variable  $\Omega$  (ou un signal discret) sera donc périodique de période  $2\pi$  (c'est à dire  $f_e$ ) et son gabarit sera défini entre 0 et  $\pi$  (c'est à dire entre 0 et  $f_e/2$ ).

## Utilisation de Matlab et Scilab

Matlab, Acronyme de *Matrix Laboratory*, est un environnement logiciel interactif puissant dédié au calcul numérique et à la visualisation ; il est très utilisé dans les divers domaines des sciences pour l'ingénieur, tant pour l'analyse que la conception. Il existe également un nombre important de *toolboxes* qui étendent les possibilités de Matlab à divers domaines spécialisés au moyen de fonctions supplémentaires : traitement du signal, automatique, traitement d'images, optimisation, réseaux de neurones, logique floue *etc...* Il faut considérer Matlab comme étant avant tout un outil de calcul matriciel.

Scilab (<http://www-rocq.inria.fr/scilab>) est un équivalent libre de droit de Matlab qui se révèle donc intéressant si on ne possède pas de licence Matlab. Même si elle est proche dans sa philosophie, la syntaxe des commandes pour l'utilisation de Scilab n'est pas totalement compatible avec Matlab.

La plupart des exemples ou figures utilisés ont été réalisés sous Matlab ou Scilab et seront illustrés sous Matlab à travers des exemples au cours du document afin d'effectuer l'apprentissage de ce type de logiciel, aujourd'hui indispensable pour tout traiteur de signaux.

## Remerciements

Merci à Michel Corazza, Daniel Ménard, Hervé Chuberre et Olivier Boëffard pour leur aide dans l'élaboration de ce document.



## Signaux et systèmes

Un *signal* est une quantité physique mesurable qui évolue en fonction d'une ou de plusieurs variables comme par exemple le temps ou des variables d'espace. Souvent on réfère un signal à la représentation mathématique de la quantité physique observée. Un signal correspond le plus souvent à une modélisation du comportement de la quantité physique observable. Cependant, il peut être extrêmement difficile d'obtenir une forme mathématique simple et concise pour un signal donné.

Un *système* est une entité physique qui réalise une opération sur un signal. Un système définit donc un signal d'entrée et un signal de sortie ; le signal de sortie correspond à la transformation opérée par le système sur le signal d'entrée. Par exemple, l'oreille humaine est un système transformant un signal correspondant à une variation de pression acoustique en des séquences parallèles de signaux électriques sur le nerf auditif. Un microphone est un système un peu analogue au précédent (en première approximation très réductrice...) dans la mesure où une variation de pression acoustique est transformée en un signal électrique monodimensionnel.

L'étude de tels systèmes conduit à analyser les transformations entre signaux d'entrée et de sortie pour des systèmes plus ou moins complexes ; cette activité est appelée *traitement du signal*. On ne parlera ici que du traitement des signaux numériques.

### Système numérique de traitement du signal

Historiquement, le traitement du signal tel que défini dans l'introduction précédente fut d'abord de type analogique. En pratique, les signaux manipulés étaient des tensions ou des courants.

Un système numérique de traitement du signal peut vivre dans un monde purement numérique. Par exemple, la cotation des valeurs d'une bourse peut être vue comme un ensemble de signaux numériques.

Cependant la majorité des opérations en traitement du signal ont lieu sur des signaux analogiques, qu'il faut donc *convertir* sous une forme numérique pour que l'on puisse leur appliquer des opérations numériques. Dans la majorité des cas, il est tout aussi indispensable de convertir le signal numérique d'un traitement numérique en un signal analogique.

Ces opérations de conversion analogique/numérique, A/N, et numérique/analogique, N/A, sont les interfaces entre un monde physique et le monde du ordinateur où s'exécutent les algorithmes de traitement du signal. Dans la chaîne du traitement du signal, ces interfaces de conversions sont le talon d'Achille de ces systèmes ; elles limitent la vitesse et la précision des systèmes de traitement. La définition technologique d'une interface de conversion A/N et N/A est toujours un compromis coût performance.

Hormis la difficulté du passage analogique/numérique, les systèmes TNS ont de sérieux avantages sur leurs équivalents analogiques.

- Flexibilité, utilisation d'algorithmes sur des ordinateurs.
- Précision et consistance des calculs numériques à comparer aux dérives des systèmes analogiques (tolérance des composants).
- Capacité de stockage, transmission sans altération du signal.

## Classification des signaux

On rappelle qu'un signal est une fonction dépendant d'une ou de plusieurs variables. Par exemple soit le signal :  $s(t)$ ,  $s$  est une quantité dépendant d'un paramètre  $t$  (par convention, on utilisera la lettre  $t$  pour la variable temps).

Un signal peut être classé selon différents critères : sa dimensionnalité, ses caractéristiques temporelles, les valeurs qu'il peut prendre, sa prédictibilité.

### Dimensionnalité

On peut tenir compte de ce critère de deux manières différentes : la dimension du signal et les dimensions des variables du signal.

Considérons tout d'abord ce critère de classification comme étant la dimension de l'espace des valeurs prises par le signal (ou la fonction mathématique modélisant le signal).

On distingue alors :

- le signal scalaire, ou signal monocanal pouvant prendre des valeurs réelles ou complexes.
- le signal vectoriel, ou signal multicanal pouvant prendre des valeurs réelles ou complexes.

Prenons par exemple un signal de Télévision (TV). Si on s'intéresse aux trois couleurs constituant une image, ce signal TV prend des valeurs dans un espace à trois dimensions, une première pour le rouge, une seconde pour le vert et enfin une troisième pour le bleu ;  $[R, V, B] = TV(t)$ .

Par contre, si on s'intéresse maintenant à la luminance, ce signal prend ses valeurs dans un espace à une dimension ;  $[L] = TV(t)$ .

On peut aussi considérer ce critère de classification comme la dimension du domaine de la fonction signal, c'est-à-dire, le nombre d'arguments pris par cette fonction.

On distingue alors :

- Le signal mono-dimensionnel qui correspond à des fonctions à un seul argument, comme par exemple le temps.
- Le signal multi-dimensionnel qui correspond à des fonctions à plusieurs arguments.

Le signal TV correspondant à la luminance peut être fonction du temps mais aussi des variables cartésiennes correspondant à un point de l'écran ;  $[I] = TV(t, x, y)$ . Il s'agit d'un signal tridimensionnel.

Les signaux abordés dans ce cours seront mono-dimensionnels fonction d'une variable que l'on considérera comme le temps. Toutes les techniques de traitement du signal se généralisent assez bien aux signaux vectoriels et multidimensionnels (voir le cours sur le traitement d'images).

### Caractéristiques temporelles

On suppose un signal scalaire  $s(t)$ . On distingue alors :

- Les signaux à temps continu ou signaux *analogiques*. La variable  $t \in \mathbb{R}$ . On notera un signal analogique de la façon suivante :  $s_a(t)$ .
- Les signaux à temps discret : ces signaux sont *définis* pour certaines valeurs de la variable  $t$ .

On peut représenter un signal à temps discret par une séquence indicée de la variable  $t$  :

$$t_n, \quad n = \dots 0, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

$t_n$  précise un instant pour lequel le signal est défini. Attention, cela ne veut pas dire que le signal est nul *entre* deux instants ; il n'est tout simplement pas défini.

On s'intéressera ici à une répartition uniforme des instants  $t_n$  que l'on peut noter  $t_n = nT$  où  $T$  est l'espace temporel entre deux échantillons consécutifs. On peut alors employer  $s(n)$  ou  $s_n$  comme notation simplifiée.

On a alors les relations suivantes :

$$s_n = s(n) = s_a(t_n) = s_a(nT)$$

### Valeurs prises par le signal

On suppose un signal scalaire  $s(t)$ . On distingue alors :

- Les signaux à valeurs continues pouvant prendre une valeur réelle dans un intervalle continue (par exemple, une tension ou un courant électrique).
- Les signaux à valeurs discrètes prenant seulement des valeurs parmi un ensemble fini de valeurs possibles.

**Un signal numérique est un signal à temps discret et à valeurs discrètes.** L'opération de discrétisation des valeurs continues d'un signal en valeurs discrètes est une *quantification*, notée  $q$  par la suite.

Soit par exemple un convertisseur Analogique/Numérique traitant des mots de 8 bits ; un signal quantifié par ce convertisseur prendra une valeur discrète parmi 256 possibles.

### Prédictibilité des signaux

On peut distinguer deux grandes classes de signaux selon leur caractère de prédictibilité.

- Les signaux déterministes qui peuvent être représentés explicitement par une fonction mathématique.
- Les signaux aléatoires qui évoluent dans le temps d'une manière imprévisible. Il est cependant possible de décrire mathématiquement certaines caractéristiques statistiques de ces signaux.

On s'intéressera dans ce cours essentiellement aux signaux déterministes.



# Chapitre 1

## Signaux déterministes à temps discret

### 1.1 Introduction

En traitement du signal, le signal à temps discret correspond en général aux valeurs d'un signal à temps continu mesuré aux seuls instants  $nT$  multiples d'une période  $T$  d'échantillonnage :  $x(t) \Rightarrow x(nT)$ .

D'un point de vue formel, un signal à temps discret peut donc être représenté par une suite ordonnée de nombres réels ou complexes notés  $x_n$  ou  $x(n)$  ou  $x(nT)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $x(n) \in \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Le signal  $x(n)$  est par définition une séquence de valeurs  $x_n$ .  $x(n)$  n'est pas *défini* pour des valeurs de  $n$  non entières. On appelle  $s(n)$  le nième *échantillon* de ce signal.

Remarques :

- On s'intéressera principalement aux suites causales réelles :

$$x(n) = 0, \quad \forall n < 0$$

- Un signal numérique est un signal à temps discret quantifié en amplitude.

Quelques signaux élémentaires sont utiles pour l'étude des propriétés des systèmes de traitement du signal.

### 1.2 Impulsion unité ou impulsion de Kronecker

Il s'agit d'un signal noté  $\delta(n)$  tel que :

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Il ne faut pas confondre avec l'impulsion de Dirac  $\delta(t)$  dans le domaine continu. Aussi, certains auteurs utilisent le symbole  $d(n)$ .

---

**Exemple 1.1 :** Pour créer une impulsion sous Matlab, il faut tout d'abord décider de la longueur de ce signal. Le programme Matlab suivant va créer un signal *imp* de longueur  $L = 32$ .

```
L = 31;
nn = 0:(L-1);
imp = zeros(L,1);
imp(1) = 1;
stem(nn,imp); %Trace le signal imp
```

Notons que les indices Matlab vont de 1 à L. Par conséquent, à  $\delta(0)$  correspond *imp*(1).

---

L'impulsion décalée notée  $\delta(n - k)$  est définie telle que :

$$\delta(n - k) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k \end{cases}$$

### 1.3 Échelon unité

Il s'agit d'un signal que l'on notera  $u(n)$  tel que :

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

On peut écrire que :

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n - k)$$

La fonction Matlab équivalente est :  $u = \text{ones}(L,1)$  ;

### 1.4 Signal exponentiel causal

Il s'agit du signal tel que :

$$x(n) = e^{-a \cdot n} \cdot u(n)$$

Selon si  $a > 0$  ou  $a < 0$ , le signal exponentiel convergera vers 0 ou divergera vers  $+\infty$ .

### 1.5 Signal rectangulaire causal de durée $N$ ou porte

Il s'agit du signal tel que :

$$x(n) = \text{Rect}_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

## 1.6 Signal sinusoïdal de période $N$

Il s'agit du signal tel que :

$$x(n) = A \sin \left[ \frac{2\pi}{N}(n + n_0) \right] u(n)$$

La période de ce signal est  $N$  :  $x(n + kN) = x(n)$ . Si on introduit le temps, on obtient :

$$\begin{aligned} x(nT) &= A \sin \left[ \frac{2\pi}{N}(n + n_0)T \right] u(nT) \\ &= A \sin [2\pi f_N nT + \varphi_0] u(nT) \end{aligned}$$

où  $f_N = \frac{1}{NT}$  est la fréquence du signal et  $\varphi_0 = 2\pi \frac{n_0}{N}$  sa phase.

## 1.7 Signal complexe

Il s'agit du signal tel que :

$$\begin{aligned} x(n) &= e^{(\sigma + j\frac{2\pi}{N})n} u(n) \\ &= e^{\sigma n} e^{j\frac{2\pi}{N}n} u(n) \end{aligned}$$

## 1.8 Cas général : signal échantillonné non impulsionnel

Si  $x(nT)$  provient de l'échantillonnage de  $x(t)$  (voir chapitre 5), on peut alors écrire que la suite des échantillons  $x(nT)$ , notée  $\{x(nT)\}$  est définie par :

$$\begin{aligned} \{x(nT)\} &= x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[(n - k)T] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) \delta[(n - k)T] \end{aligned}$$

Une valeur particulière pour  $t = kT$  vaut :  $x(kT) = x(t) \cdot \delta[(n - k)T]$ .

A cette notation on utilisera plutôt dans la suite :

- pour un signal échantillonné, la multiplication par un peigne de Dirac :  $x^*(t) = x(t) \cdot \delta_T(t)$  ;
- pour un signal discret, la notation :

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \delta(n - k).$$

## 1.9 Propriétés des signaux à temps discret

- **Causalité** : un signal est dit causal lorsque :

$$x(n) = 0, \quad \forall n < 0$$

- On définit l'**énergie**  $E(\infty)$  d'un signal à temps discret de la manière suivante :

$$E(\infty) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad (1.1)$$

La **puissance moyenne**  $P_m$  d'un signal  $x(n)$  est définie comme :

$$P_m \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} |x(n)|^2 \quad (1.2)$$

Si l'énergie  $E(\infty)$  est finie alors  $x(n)$  est un signal *d'énergie finie* et  $P = 0$ . Si  $E(\infty)$  est infinie alors  $P_m$  peut être soit finie ou infinie, si  $P_m$  est finie et non nulle alors  $x(n)$  est un signal de *puissance finie*.

Par exemple un signal continu est un signal d'énergie infinie ( $E(\infty) = \infty$ ) mais de puissance finie, si  $a$  est l'amplitude du signal,  $P = a^2$ .

- La **puissance instantanée** est définie par :  $P(n) = |x(n)|^2$ .
- Un signal  $x(n)$  est **périodique de période**  $P$  si et seulement si  $x(n+P) = x(n) \forall n$  sinon  $x(n)$  est apériodique.
- Un signal  $x(n)$  est **symétrique ou pair** si et seulement si  $x(-n) = x(n)$ . Un signal  $x(n)$  est **antisymétrique ou impair** si et seulement si  $x(-n) = -x(n)$ . Tout signal peut se décomposer comme la somme d'un signal pair et d'un signal impair.
- **Intercorrélation** entre deux signaux  $x(n)$  et  $y(n)$

$$\mathcal{R}_{xy}(k) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y(n+k) = \mathcal{R}_{yx}(-k) \quad (1.3)$$

- **Autocorrélation** d'un signal  $x(n)$

$$\mathcal{R}_{xx}(k) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)x(n+k) = \mathcal{R}_{xx}(-k) \quad (1.4)$$

On a :

$$|\mathcal{R}_{xx}(k)| \leq |\mathcal{R}_{xx}(0)| = E(\infty)$$

- **Convolution linéaire** entre deux signaux  $x(n)$  et  $y(n)$

$$\varphi_{xy}(k) = x(k) * y(k) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y(k-n) \quad (1.5)$$

On note que  $\mathcal{R}_{xy}(k) = x(k) * y(-k)$ .



## Chapitre 2

# Transformation en $Z$

La transformée en  $Z$  est un outil largement utilisé pour l'étude des systèmes de traitement numérique du signal. Elle joue un rôle analogue à celui de la transformée de Laplace en continu. Ce type de transformée permet de décrire aisément les signaux à temps discret et la réponse des systèmes linéaires invariants soumis à des entrées diverses. La transformée en  $Z$  est un outil permettant de calculer la réponse impulsionnelle d'un système linéaire invariant décrit par une équation aux différences finies. De plus, à l'opérateur de convolution dans le domaine temporel correspond l'opérateur multiplicatif dans le domaine de la transformée en  $Z$ .

### 2.1 Définition de la transformée en $Z$

La transformée en  $Z$  directe bilatérale d'un signal à temps discret  $x(n)$  est définie par :

$$Z[x(n)] = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (2.1)$$

où  $z$  est une variable complexe ( $z \in \mathbb{C}$ ) définie partout où cette série converge.

Les signaux discrets étant la plupart du temps causaux on définit plutôt la transformée en  $Z$  (dite unilatérale) par :

$$Z[x(n)] = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (2.2)$$

La transformée en  $Z$  établit une correspondance entre l'espace des signaux à temps discret et l'espace des fonctions analytiques (ou holomorphes) définies sur un sous-ensemble du plan complexe, appelé domaine de convergence  $\mathcal{D}_{CV}$ . On définit le *plan en  $z$*  comme étant le plan complexe muni du point à l'infini. La série des puissances introduite dans l'équation de définition précédente ne converge que pour un sous-ensemble du plan complexe. Ce sous-ensemble est appelé *région de convergence* ou *domaine de convergence*. Une région de convergence correspond à l'ensemble des valeurs de  $z$  telles que  $X(z)$  soit définie et à valeurs finies. Spécifier le domaine de convergence de la transformée est tout aussi important que la transformée elle-même.

Pour déterminer  $r$ , on utilise le critère Cauchy, ou celui d'Alembert, sur la convergence des séries géométriques. Une série  $S$  :

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} U_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n + \dots$$

converge si la condition suffisante suivante est satisfaite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |U_n|^{\frac{1}{n}} < 1$$

Dans le cas de la  $TZ$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x(n)z^{-n}|^{\frac{1}{n}} < 1 \quad (2.3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x(n)|^{\frac{1}{n}} |z^{-1}| < 1 \quad (2.4)$$

Posons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x(n)|^{\frac{1}{n}} = r$$

D'après la relation précédente :

$$|z^{-1}| < \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{z} < \frac{1}{r}$$

La série converge donc pour  $|z| > r$ , le disque de convergence. La figure 2.1 illustre ce domaine de convergence pour  $r = a$ .

### 2.1.1 Exemples de transformée en $Z$

**Exemple 2.1 :** Soit le signal à temps discret suivant :

$$x(n) = \delta(n)$$

on a :

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \\ X(z) &= z^0, \quad \forall z \in \mathbb{C} \\ X(z) &= 1, \quad \forall z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Pour ce premier exemple la région de convergence est  $\mathbb{C}$ .

---

**Exemple 2.2 :** Soit le signal à temps discret suivant :

$$x(n) = \delta(n - k)$$

on a :

$$X(z) = z^{-k}$$

La région de convergence dépend ici de  $k$ . Si  $k = 0$ , la région de convergence est  $\mathbb{C}$  (exemple précédent). Si  $k < 0$ ,  $X(z)$  n'est pas à valeur finie pour  $z = \infty$ , donc la région de convergence est ici  $\mathbb{C} - \{\infty\}$ . Si  $k > 0$ ,  $X(z)$  n'est pas à valeur finie pour  $z = 0$ , donc la région de convergence est  $\mathbb{C} - 0$ .

Pour un signal à durée *finie*, la région de convergence correspond au plan complexe  $\mathbb{C}$  avec l'exclusion possible de  $z = 0$  ou  $z = \infty$ .

---



---

**Exemple 2.3 :** Soit le signal échelon unité  $u(n)$  à temps discret suivant, on a :

$$\begin{aligned} U(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\ &= \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \end{aligned}$$

La région de convergence  $\mathcal{D}_{CV}$  est ici l'extérieur du disque unité, i.e. pour  $|z| > 1$ . En effet,

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} |x(n)|^{\frac{1}{n}} = 1$$


---

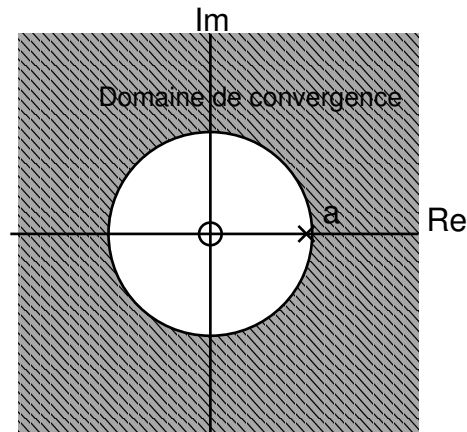


FIG. 2.1 – Domaine de convergence,  $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$

**Exemple 2.4 :** Soit le signal à temps discret suivant :

$$x(n) = a^n u(n) \quad (2.5)$$

on a :

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \\ X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \\ X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n \\ X(z) &= \frac{1}{1-az^{-1}} \end{aligned}$$

La série précédente converge si et seulement si  $|az^{-1}| < 1$ , c'est-à-dire ssi  $|a| < |z|$ . La figure 2.1 représente la région de convergence dans le plan complexe. Si  $a = 1$ , on obtient le cas particulier de l'échelon unité.

### 2.1.2 Description générale d'une région de convergence

D'une manière générale, la région de convergence est toujours une couronne, c'est-à-dire est définie par l'ensemble des points  $z$  tels que  $r_1 < |z| < r_2$ , où  $r_1$  peut être nul et  $r_2$  peut être  $\infty$ .

Soit un signal  $x(n)$  et  $z$  mis sous forme polaire ( $z = re^{jw}$ ), on a alors :

$$\begin{aligned}
 |X(z)| &= \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \right| \\
 &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|r^{-n} \\
 &\leq \sum_{n=-\infty}^{-1} |x(n)|r^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)|r^{-n} \\
 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |x(-n)|r^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x(n)|}{r^n}
 \end{aligned}$$

La région de convergence de  $X(z)$  correspond au sous ensemble de  $\mathbb{C}$  pour lequel les *deux séries* convergent. Supposons que la seconde somme soit finie pour  $r = r_2$ , quel que soit  $r \geq r_2$  la série converge (dans ce cas en effet, chaque élément de la somme est plus petit que pour  $r = r_2$ ). D'une façon analogue, supposons la première somme finie pour  $r = r_1$ , alors elle est finie pour  $r \leq r_1$ .

La région de convergence de la première somme correspond au sous ensemble de  $\mathbb{C}$  tel que  $|z| > r_2$ . La région de convergence de la seconde somme correspond au sous ensemble de  $\mathbb{C}$  tel que  $|z| < r_1$ . Remarque : cette couronne peut être vide (si  $r_2 \leq r_1$ ).

## 2.2 Propriétés de la transformée en $z$

### 2.2.1 Linéarité

Soient deux signaux à temps discret  $x_1(n)$  et  $x_2(n)$  ayant pour transformées en  $z$  respectives  $X_1(z)$  et  $X_2(z)$ . Soit le signal  $x(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$ .

La définition de la transformée en  $z$  (une somme de monômes en  $z$ ) conduit directement à la relation suivante :

$$X(z) = aX_1(z) + bX_2(z) \quad (2.6)$$

Il s'agit d'une propriété très importante permettant de calculer une transformée en  $Z$  à partir d'une décomposition en transformées élémentaires de signaux connus. La région de convergence de la somme de l'équation (2.6) contient l'intersection des régions de convergence de  $X_1(z)$  et  $X_2(z)$ .

**Exemple 2.5 :** Soit  $x(n) = \cos(\omega_0 n)u(n)$ , on peut décomposer  $x(n)$  de la manière suivante :

$$x(n) = \frac{1}{2}(e^{i\omega_0 n} + e^{-i\omega_0 n})u(n)$$

En reprenant l'exemple de l'équation (2.5) avec  $a = e^{\pm i\omega_0 n}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - e^{i\omega_0} z^{-1}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - e^{-i\omega_0} z^{-1}}\right) \\ &= \frac{1 - \cos(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0)z^{-1} + z^{-2}} \end{aligned}$$

### 2.2.2 Théorème du retard

Soit un signal  $x(n)$  de transformée en  $Z$ ,  $X(z)$ . Soit  $k$ , un indice temporel quelconque et  $x'(n) = x(n - k)$ , on obtient simplement à partir de la définition de la transformée :

$$X'(z) = Z[x(n - k)] = z^{-k}X(z) \quad (2.7)$$

La région de convergence reste inchangée, excepté l'ajout ou la suppression de  $z = 0$  ou  $z = \infty$ . C'est de cette propriété que vient l'utilisation d'une cellule  $z^{-1}$  pour tenir compte d'un décalage temporel d'une unité.

### 2.2.3 Théorème de l'avance

Soit un signal  $x(n)$  causal de transformée en  $Z$  (unilatérale),  $X(z)$ .

$$Z[x(n + k)] = z^{+k}X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(n)z^{k-n} \quad (2.8)$$

**Exemple 2.6 :**

Soit  $x(n) = n.u(n)$ , déterminer sa  $TZ$  ainsi que son domaine de convergence.

Soit  $x(n-2) = (n-2)u(n)$ , déterminer sa  $TZ$  ainsi que son domaine de convergence.

Soit  $x(n-2) = (n-2)u(n-2)$ , déterminer sa  $TZ$  ainsi que son domaine de convergence.

Soit  $x(n+2) = (n+2)u(n)$ , déterminer sa  $TZ$  ainsi que son domaine de convergence.

**2.2.4 Facteur d'échelle en  $z$** 

Soit un signal  $x(n)$  de transformée  $X(z)$  avec  $r_1 < |z| < r_2$  pour couronne de convergence.

Soit  $y(n) = a^n x(n)$ , on a alors :

$$Y(z) = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

avec  $|a|r_1 < |z| < |a|r_2$  pour région de convergence.

**2.2.5 Inversion de l'axe temporel**

Soit  $x(n)$  avec  $X(z)$  pour transformée et  $r_1 < |z| < r_2$  pour rayon de convergence. Soit  $y(n) = x(-n)$ , on a alors :

$$Y(z) = X\left(\frac{1}{z}\right)$$

avec  $\frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$  comme rayon de convergence.

**2.2.6 Dérivation dans l'espace en  $z$** 

Soit  $x(n)$  avec  $X(z)$  pour transformée. Soit  $y(n) = n.x(n)$ . on a alors :

$$Z[n.x(n)] = Y(z) = -z \frac{d}{dz} X(z) \quad (2.9)$$

La région de convergence reste inchangée. Démonstration :

$$\begin{aligned} Y(z) &= -z \frac{d}{dz} X(z) \\ &= \frac{d}{dz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \\ &= -z \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) (-n) z^{-n-1} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [n x(n)] z^{-n} \end{aligned}$$

On peut étendre cette relation à la multiplication d'un signal  $x(n)$  par  $n^k$ , avec  $k \neq 1$ . On obtient alors :

$$X_k(z) = Z[x_k(n)] = Z[n^k . x(n)] = -z \frac{d}{dz} X_{k-1}(z) \quad (2.10)$$

avec

$$X_{k-1}(z) = Z \left[ n^{k-1} \cdot x(n) \right] \quad (2.11)$$

**Exemple 2.7 :** Soit  $x(n) = nu(n)$ , on a vu précédemment que :

$$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} X(z) &= -z \frac{d}{dz} U(z) \\ &= -z \left( \frac{z^{-2}}{(1 - z^{-1})^2} \right) \\ &= \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}, |z| > 1 \end{aligned}$$

**Exemple 2.8 :**

Donner les TZ des signaux :

$$\begin{aligned} n^2 u(n) \\ na^n u(n) \end{aligned}$$

### 2.2.7 Théorème de la valeur initiale

$$x(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} X(z) \quad (2.12)$$

Si  $x(0) = 0 \Rightarrow x(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} zX(z)$

Si  $x(0) = x(1) = 0 \Rightarrow x(2) = \lim_{n \rightarrow \infty} z^2 X(z)$

⋮

### 2.2.8 Théorème de la valeur finale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} 1 - z^{-1} X(z) \quad (2.13)$$

si  $x(\infty) < \infty$ .



### 2.2.9 Théorème de la valeur intermédiaire

$$x(n) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} (-z^2 \frac{d}{dz})^n X(z) \quad (2.14)$$

$$= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} (-1)^n z^{2n} \frac{d^n}{dz^n} X(z) \quad (2.15)$$

### 2.2.10 Théorème de la sommation

$$Z \left[ s(n) = \sum_{k=0}^n x(k) \right] = \frac{z}{z-1} X(z) = S(z) \quad (2.16)$$

Application au calcul d'une série convergente :

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \left[ \frac{z}{z-1} X(z) \right] = X(z)|_{z=1} = X(1) \quad (2.17)$$

### 2.2.11 Théorème de la convolution linéaire discrète

Soient  $x_1(n)$  et  $x_2(n)$  avec pour transformées en  $Z$  respectives  $X_1(z)$  et  $X_2(z)$ . Soit  $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$ , on a alors :

$$X(z) = X_1(z)X_2(z)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k) \right] z^{-n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n-k)z^{-n} \right] \\ &= \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)z^{-k} \right) X_2(z) \\ &= X_1(z)X_2(z) \end{aligned}$$

Pour calculer la convolution de deux signaux, il peut être intéressant de multiplier les transformées respectives des deux signaux convolués et de rechercher la transformée en  $Z$  inverse de la transformée résultante.

Soit  $s(n)$  la sortie d'un système linéaire invariant de réponse impulsionnelle  $h(n)$  soumis à l'entrée  $e(n)$ , on a vu au cours du chapitre sur les signaux et systèmes que :

$$s(n) = e(n) * h(n)$$

on a alors :

$$S(z) = E(z)H(z)$$

## 2.3 Transformées en $Z$ rationnelles

On entend par transformées en  $Z$  rationnelles, l'ensemble des fonctions en  $Z$  s'écrivant comme le ratio de deux polynômes en  $z^{-1}$ . Cette classe de fonction correspond aux systèmes linéaires invariants décrits par une équation aux différences finies.

### 2.3.1 Définition des pôles et des zéros

Les *zéros* d'une transformée en  $Z$ ,  $X(z)$ , sont les valeurs de  $z$  telles que  $X(z) = 0$ .

Les *pôles* d'une transformée en  $Z$ ,  $X(z)$ , sont les valeurs de  $z$  telles que  $X(z) = \infty$

Si  $X(z)$  est une fonction rationnelle,  $X(z)$  peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{N(z)}{D(z)} \\ &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \end{aligned} \quad (2.18)$$

En supposant  $a_0 \neq 0$  et  $b_0 \neq 0$ , on peut réécrire l'équation (2.18) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{b_0 z^{-M} \frac{b_M}{b_0} + \dots + z^M}{a_0 z^{-N} \frac{a_N}{a_0} + \dots + z^N} \\ &\triangleq \frac{b_0}{a_0} z^{N-M} \frac{N_1(z)}{D_1(z)} \end{aligned}$$

$N_1(z)$  a au plus  $M$  racines simples ou multiples en  $z_1 \dots z_M$ .

$D_1(z)$  a au plus  $N$  pôles simples ou multiples en  $p_1 \dots p_N$ .

On alors réécrire  $X(z)$  sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{b_0 z^{-M} (z - z_1) \dots (z - z_M)}{a_0 z^{-N} (z - p_1) \dots (z - p_N)} \\ &= \alpha \frac{z^{-M} \prod_{k=1}^M (z - z_k)}{z^{-N} \prod_{k=1}^N (z - p_k)} \end{aligned}$$

avec  $\alpha \triangleq \frac{b_0}{a_0}$ . Il vient alors que :

1.  $X(z)$  possède  $M$  zéros finis en  $z_1 \dots z_M$
2.  $X(z)$  possède  $N$  pôles finis en  $p_1 \dots p_N$
3. si  $N > M$ ,  $X(z)$  possède  $N - M$  zéros en  $z = 0$
4. si  $N < M$ ,  $X(z)$  possède  $M - N$  pôles en  $z = 0$
5. il peut aussi y avoir des pôles ou zéros en  $z = \infty$  selon que  $X(\infty) = 0$  ou  $X(\infty) = \infty$

En suivant la notation précédente,  $X(z)$  est complètement déterminé par la position de ses pôles et de ses zéros ainsi que par le facteur d'amplitude  $\alpha$ . Les pôles et zéros reflètent le *comportement* du système (ou signal) tandis que le facteur  $\alpha$  n'intervient que sur l'amplitude des signaux.

$X(z)$  peut donc être représenté sous la forme d'un graphique modélisant la position des pôles et des zéros dans le plan complexe. Par définition, la région de convergence de  $X(z)$  exclue tous les pôles de cette fonction.

### 2.3.2 Fonction de transfert d'un système linéaire invariant

Dans le chapitre 4, il sera vu qu'une manière de caractériser un système linéaire invariant consiste à étudier sa réponse impulsionnelle  $h(n)$ . Il est donc tout aussi légitime de caractériser un système par la transformée en  $Z$ ,  $H(z)$ , de sa réponse impulsionnelle, encore appelée *fonction de transfert* du système.

Lors de l'analyse d'un système donné, on considère le plus souvent  $h(n)$  ou  $H(z)$  comme inconnue. A partir d'une entrée connue,  $e(n)$ , on observe alors la sortie  $s(n)$  caractérisée par sa transformée en  $Z$ ,  $S(z)$ . La fonction de transfert du système est alors :

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)}$$

On a vu que si on prend  $e(n) = \delta(n)$ , on obtient directement  $s(n) = h(n)$  ; ce qui devient dans le plan en  $Z$ ,  $E(z) = 1$  donc  $H(z) = S(z)$

Si on applique cette approche aux systèmes linéaires invariants décrits par une équation aux différences finies, le système est décrit par la relation suivante :

$$s(n) = - \sum_{k=1}^N a_k s(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k e(n-k)$$

Prenons la transformée en  $Z$  des membres de l'équation précédente :

$$S(z) = - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} S(z) + \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} E(z)$$

ou encore :

$$S(z) \left[ 1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \right] = E(z) \left[ \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right]$$

en posant  $a_0 = 1$ , sans perdre en généralité, on a :

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{S(z)}{E(z)} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \end{aligned} \tag{2.19}$$

L'équation (2.19) met en évidence qu'un système linéaire invariant décrit par une équation aux différences finies a une fonction de transfert dont la transformée en  $Z$  est une fonction rationnelle. Ceci montre l'intérêt de l'étude des transformées en  $Z$  s'écrivant sous la forme de polynômes rationnels.

## 2.4 Transformée en $Z$ inverse

A partir d'une liste de transformées en  $Z$  de signaux élémentaires connus, il peut être efficace de retrouver des signaux temporels à partir de transformées dérivées des opérateurs et propriétés

décrits précédemment. Cependant, lorsque la transformée ne peut facilement s'écrire comme la combinaison de transformées élémentaires, il reste les techniques générales de transformation inverse :

1. l'intégration sur un contour fermé en utilisant le calcul des résidus,
2. le développement en puissance de  $z$  et de  $z^{-1}$ ,
3. le développement en fractions élémentaires.

### 2.4.1 Transformée inverse par intégration et méthode des résidus

Soit  $X(z)$  la transformée en  $Z$  du signal  $x(n)$ . On définit la transformée en  $Z$  inverse, la relation déterminant  $x(n)$  à partir de  $X(z)$  telle que :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{n-1} X(z) dz \quad (2.20)$$

L'intégrale précédente consiste à sommer  $z^{n-1} X(z)$  pour des valeurs de  $z$  prises sur un contour fermé du plan complexe qui contient l'origine du plan tout en étant incluse dans le domaine de convergence de la fonction.

L'équation 2.20 est équivalente à :

$$x(n) = \sum_{\text{Tous les pôles } p_i \text{ de } R(z)} \text{Résidus de } R(z) \text{ aux pôles } p_i \quad (2.21)$$

avec  $R(z) = z^{n-1} X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$  sous forme fractionnelle.

On notera plutôt :

$$x(n) = \sum_{\forall p_i \in \mathcal{D}_{CV}} \mathcal{R}es(z^{n-1} X(z), p_i) \quad (2.22)$$

avec  $\mathcal{R}es(R(z), p_i)$  le coefficient d'indice  $-1$  dans le développement en série de Laurent de la fonction  $R(z)$  au voisinage de  $p_i$ .

Le calcul des résidus dépend de la présence de pôles simples ou multiples sur  $R(z)$ , i.e. dépend de la présence de zéros simples ou doubles sur  $D(z)$ .

1. Pôles simples de  $R(z)$  :  $p_i$  tel que  $D(z)|_{p_i} = 0$ .

$$\mathcal{R}es(R(z), p_i) = \frac{N(z)}{\frac{d}{dz} D(z)} \quad (2.23)$$

Si  $D(z) = (z - p_i)F(z)$  avec  $F(p_i) \neq 0$  alors

$$\frac{d}{dz} D(z)|_{z=p_i} = \frac{d}{dz} [(z - p_i)F(z)]_{z=p_i} = F(z)|_{z=p_i} + (z - p_i) \frac{d}{dz} F(z)|_{z=p_i} \quad (2.24)$$

$$= F(z)|_{z=p_i} = \frac{D(z)}{z - p_i} \Big|_{z=p_i} \quad (2.25)$$

d'où

$$\mathcal{R}es(R(z), p_i) = \left[ (z - p_i) \frac{N(z)}{D(z)} \right]_{z=p_i} \quad (2.26)$$

2. Pôles multiples d'ordre  $m$  de  $R(z)$ .

Si  $D(z) = (z - p_i)^m F(z)$  avec  $F(p_i) \neq 0$  alors

$$\mathcal{R}es(R(z), p_i) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[ (z - p_i)^m \frac{N(z)}{D(z)} \right]_{z=p_i} \quad (2.27)$$

Démonstration :

Soit

$$R(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{N(z)}{(z-p)^m D_1(z)} \quad \text{avec } D_1(p) \neq 0$$

$R(z)(z-p)^m = \frac{N(z)}{D_1(z)}$  est holomorphe au voisinage de  $p$ . On effectue un développement en série entière :

$$\begin{aligned} R(z)(z-p)^m &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n \quad \text{avec, selon la formule de Taylor,} \\ a_n &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} [R(z)(z-p)^m]_{z=p} \\ R(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^{n-m} \\ &= \sum_{k=-m}^{\infty} a_{k+m} (z-p)^k \end{aligned}$$

$\mathcal{R}es(R(z), p)$  est par définition le coefficient  $a_{m-1}$  en  $(z-p)^{-1}$  (i.e. pour  $k = -1$ ) :

$$\mathcal{R}es(R(z), p) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-p)^m R(z)]_{z=p}$$

**Exemple 2.9 :** Soit

$$X(z) = \frac{z}{z - e^{-a}} \quad \text{avec } a > 0$$

Il existe un pôle simple  $p_1 = e^{-a}$ .

$$x(n) = \mathcal{R}es(z^{n-1} X(z), p_1) = \mathcal{R}es\left(\frac{z^n}{z - e^{-a}}, p_1\right) \quad (2.28)$$

$$= z^n|_{z=p_i} = e^{-an} \cdot u(n) \quad (2.29)$$

**Exemple 2.10 :** Calculer la  $TZI$  de

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$X(z) = z^{-2}$$

### 2.4.2 Transformée inverse par division polynômiale

Il est possible de calculer la transformée en  $Z$  inverse selon les puissances croissantes de  $z^{-1}$  ou selon les puissances décroissantes de  $z$ .

S'il est possible d'écrire  $X(z)$  comme une série de puissances de  $z^{-1}$ , l'unicité de la transformation directe conduit à prendre les coefficients de la série pour le signal temporel. Si

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n}$$

alors

$$x(n) = c_n$$

On recherche par exemple la réponse impulsionnelle d'un système décrit par l'équation aux différences suivante :

$$s(n) = s(n-3) + e(n)$$

On trouve aisément :

$$H(z) = \frac{1}{1-z^{-3}}$$

En utilisant la limite des séries géométriques, on a :

$$\frac{1}{1-z^{-3}} = \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-3})^k$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-3k} = 1 + z^{-3} + z^{-6} + \dots$$

on obtient donc :

$$h(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-3k)$$

Il s'agit ici d'un cas simple d'utilisation des séries géométriques (développement en série de Laurent).

**Exemple 2.11 :** Calculer la  $TZI$  de

$$X(z) = \frac{0.5z}{z^2 - 1.5z + 0.5} = \frac{0.5z^{-1}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

par division polynômiale selon les puissances croissantes de  $z^{-1}$  et selon les puissances décroissantes de  $z$

### 2.4.3 Transformée inverse par décomposition en fractions rationnelles

L'idée générale de cette approche consiste à trouver pour une fonction  $X(z)$  complexe un développement en fonctions en  $Z$  plus simples et pour lesquelles une transformée inverse est connue. En appliquant le principe de linéarité de la transformée, il est aisé de recomposer le signal temporel inverse à partir des signaux temporels correspondant à chacune des transformées élémentaires. En supposant :

$$X(z) = \alpha_1 X_1(z) + \alpha_2 X_2(z) + \dots + \alpha_L X_L(z)$$

On obtient :

$$x(n) = \alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n) + \dots + \alpha_L x_L(n)$$

La classe des transformées en  $Z$  rationnelles peut toujours s'écrire selon ce principe. On écrira alors :

$$X(z) = \alpha_1 \frac{z}{z - p_1} + \alpha_2 \frac{z}{z - p_2} + \dots \tag{2.30}$$

On aura alors par  $TZI$  :

$$x(n) = \alpha_1 p_1^n + \alpha_2 p_2^n + \dots \tag{2.31}$$

Il faut toutefois remarquer que pour les  $TZ$  l'original le plus simple est celui de  $\frac{z}{z-a} \Leftrightarrow a^n$  et non  $\frac{1}{z-a}$ . De ce fait, il est plus simple de décomposer  $z^{-1}X(z)$  que  $X(z)$ .

$$z^{-1}X(z) = \alpha_1 \frac{1}{z - p_1} + \alpha_2 \frac{1}{z - p_2} + \dots \tag{2.32}$$

Les formes *élémentaires* des fonctions  $X_i(z)$  sont le plus souvent des formes telles que définies selon le tableau suivant :

Type	$X_i(z)$	$x_i(n)$
polynomial en $z$	$\sum_k c_k z^{-k}$	$\sum_k c_k \delta(n - k)$
pôle réel simple	$\frac{1}{1 - pz^{-1}}$	$p^n u(n)$
pôle réel double	$\frac{pz^{-1}}{(1 - pz^{-1})^2}$	$np^n u(n)$
pôle réel double	$\frac{1}{(1 - pz^{-1})^2}$	$(n + 1)p^n u(n)$
pôle réel triple	$\frac{p^2 z^{-1}}{(1 - pz^{-1})^3}$	$\frac{n(n-1)}{2} p^n u(n)$
pôle complexe conjugué	$\frac{r \sin(\omega_0) z}{(z - re^{i\omega_0})(z - re^{-i\omega_0})}$	$r^n \sin(\omega_0 n) u(n)$

## 2.5 Transformées en $Z$ et en $Z$ inverse de fonctions usuelles

Le tableau 2.1 résume les transformées en  $Z$  et en  $Z$  inverse des fonctions les plus utilisées en traitement du signal.  $T$  est la période d'échantillonnage du signal transformé dans lequel on a posé  $t = nT$ .

$x(t)$	$x(n)$	$X(z)$
	$\delta(n)$	1
	$\delta(n - k)$	$z^{-k}$
$u(t)$	$u(n)$	$\frac{z}{z - 1}$
$t$	$n$	$\frac{Tz}{(z - 1)^2}$
$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{2}(nT)^2$	$\frac{T^2z(z + 1)}{2(z - 1)^3}$
$a^{\frac{t}{T}}$	$a^n$	$\frac{z}{z - a}$
$e^{-at}$	$e^{-anT}$	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$
$\sin \omega_0 t$	$\sin \omega_0 nT$	$\frac{z \sin \omega_0 T}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$
$\cos \omega_0 t$	$\cos \omega_0 nT$	$\frac{z(z - \cos \omega_0 T)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$
$e^{-at} \sin \omega_0 t$	$e^{-at} \sin \omega_0 nT$	$\frac{ze^{-aT} \sin \omega_0 T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega_0 T + e^{-2aT}}$
$e^{-at} \cos \omega_0 t$	$e^{-at} \cos \omega_0 nT$	$\frac{z^2 - ze^{-aT} \cos \omega_0 T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega_0 T + e^{-2aT}}$
$ax_1(t) + bx_2(t)$	$ax_1(n) + bx_2(n)$	$aX_1(z) + bX_2(z)$
$x(t - kT)$	$x(n - k)$	$z^{-k}X(z)$

TAB. 2.1 – Tables des transformées en  $Z$  de fonctions usuelles.  $T$  est la période d'échantillonnage du signal transformé dans lequel on a posé  $t = nT$ .



## Chapitre 3

# Transformée de Fourier d'un signal discret

Nous avons vu au cours du chapitre sur les Signaux et systèmes que la transformée de Fourier de deux signaux convolués correspond à la multiplication des transformées des deux signaux pris séparément. Comme l'opérateur de convolution est un opérateur fondamental dans l'analyse des systèmes de traitement du signal, il est donc important de disposer de solutions algorithmiques efficaces pour cet opérateur.

Pour une transformée de Fourier à temps discret la variable *temps* est discrète, donc peut être représentée sur un ordinateur tandis que la variable *fréquence* est une variable continue qu'il faut aussi *discrétiser*. En fait sur un ordinateur, un signal temporel, est une séquence de longueur *finie*, par exemple N points. Il n'est pas nécessaire d'avoir une précision *infinie* dans le domaine fréquentiel; N points fréquentiels suffisent pour contenir l'information du signal temporel.

La Transformée de Fourier *Discrète*, TFD ou DFT, est donc l'outil définissant le cadre de calcul d'une transformée de Fourier à temps discret et à fréquences discrètes.

### 3.1 Rappels sur les signaux continus

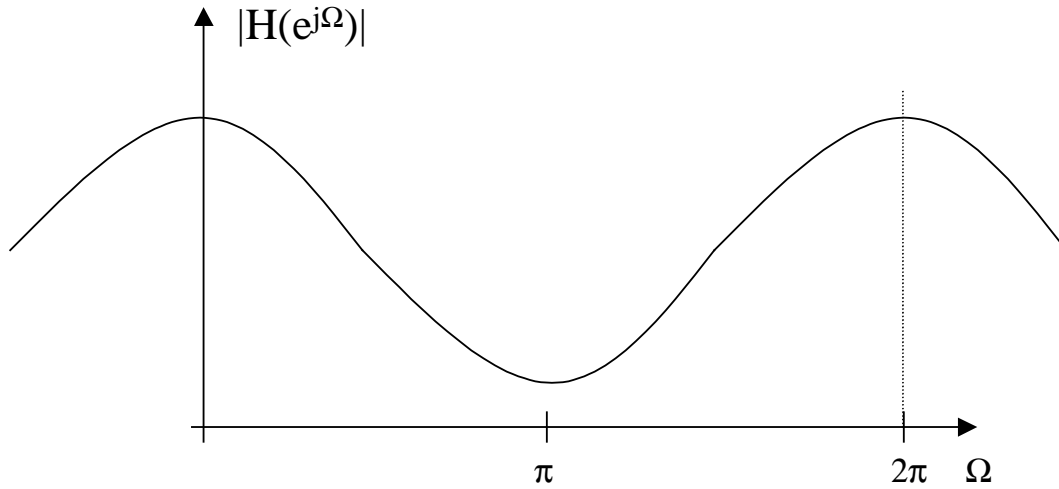
Soit un signal analogique  $x_a(t)$  dont la transformée de Fourier est définie par :

$$X_a(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3.1)$$

avec  $\omega = 2\pi f$ .

On retrouve le signal temporel à partir de sa transformée par la transformée de Fourier inverse définie par la relation suivante :

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (3.2)$$

FIG. 3.1 –  $TF$  d'un signal non périodique

### 3.2 Signaux discrets non périodiques

Pour un signal  $x(n)$  discret quelconque non périodique, sa transformée de Fourier ( $TF$ ) s'écrit :

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n} \quad (3.3)$$

On parlera également de Transformée de Fourier à Temps Discret ( $TFTD$  ou  $DTFT$  en Anglais).

$X(e^{j\Omega})$  peut être exprimé à partir de la transformée en  $Z$  par la relation :

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \Big|_{z=e^{j\Omega}} = X(z) \Big|_{z=e^{j\Omega}} \quad (3.4)$$

Cette équation implique que le  $TF$  n'existe que si le cercle unité, caractérisé par  $z = e^{j\Omega}$  ( $|z| = 1$ ), appartient au domaine de convergence de  $X(z)$  ( $|z| > r$  avec  $r < 1$  pour une  $TZ$  monolatérale).

$X(\Omega)$  est *périodique* de période  $2\pi$ . Ceci implique que **le spectre d'un signal discret est périodique** (voir l'exemple figure 3.1).

Si  $x(n)$  est une suite réelle, alors des propriétés de symétrie existent :  $|X(e^{j\Omega})|$  est paire et  $Arg X(e^{j\Omega})$  est impaire.

Ces propriétés de périodicité et de symétrie sur le spectre d'un signal discret sont importantes pour représenter graphiquement le module et l'argument de la  $TF$

La  $TF$  inverse est obtenue à partir de la transformée en  $Z$  inverse de  $X(z)$ .

$$x(n) = TZ^{-1}[X(z)] = \frac{1}{2j\pi} \oint_C z^{n-1} X(z) dz = \frac{1}{2j\pi} \oint_C z^n X(z) \frac{dz}{z} \quad (3.5)$$

pour des valeurs de  $z$  prises sur un contour fermé du plan complexe qui contient l'origine du plan tout en étant incluse dans le domaine de convergence de la fonction.

Si

$$z = e^{j\Omega}$$

alors le contour est le cercle unité et  $\Omega$  varie de 0 à  $2\pi$  (ou de  $-\pi$  à  $\pi$ ).

$$\frac{dz}{z} = \underbrace{j e^{j\Omega}}_{dz} \underbrace{e^{-j\Omega}}_{\frac{1}{z}} d\Omega = j d\Omega$$

A partir de l'équation 3.5, on obtient alors la définition de la transformée de Fourier inverse :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(e^{j\Omega}) e^{jn\Omega} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) e^{jn\Omega} d\Omega \quad (3.6)$$

Dans le cas où on utilise la variable *fréquence*  $f$ , la *TF* s'écrit :

$$X(f) = X(e^{j2\pi fT}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi fnT} \quad (3.7)$$

La période de  $X(f)$  est maintenant de  $f_e = 1/T$ . Le spectre d'un signal discret est périodique de période  $f_e$ . La transformée inverse s'écrit :

$$x(n) = \frac{1}{f_e} \int_0^{f_e} X(f) e^{j2\pi fnT} df \quad (3.8)$$

**Exemple 3.1 :** Soit le signal  $x(n) = a^n u(n)$  avec  $|a| < 1$ , déterminer sa *TF*  $X(e^{j\Omega})$ . Tracer son module et son argument. Retrouver  $x(n)$  par *TF* inverse de  $X(e^{j\Omega})$ .

**Exemple 3.2 :** Démontrer que les équations 3.3 et 3.6 sont inverses l'une de l'autre.

### 3.3 Signaux discrets périodiques

Pour un signal  $x_p(n)$  discret périodique de période  $N$ , une décomposition en série de Fourier doit être utilisée sous la forme :

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) \cdot e^{(-2j\pi \frac{n \cdot k}{N})}, \quad k = 0, 1 \dots N-1 \quad (3.9)$$

$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) \cdot e^{(2j\pi \frac{n \cdot k}{N})}, \quad n = 0, 1 \dots N-1 \quad (3.10)$$

Sa Transformée de Fourier s'écrit alors :

$$X_p(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_p(k) \delta \left( \Omega - k \frac{2\pi}{N} \right) \quad (3.11)$$

**Exemple 3.3 :** Soit le signal  $x_p(n) = \sin 2\pi n/N_0$ , déterminer les coefficients  $X_p(k)$  de la série de Fourier et en déduire sa *TF*  $X_p(e^{j\Omega})$ .

Tracer son module et son argument.

Retrouver  $x(n)$  par *TF* inverse de  $X(e^{j\Omega})$ .

### 3.4 Conditions d'existence de la transformée de Fourier

Déterminer la classe de signaux qui peuvent être représentés par l'équation 3.6 est équivalent à considérer la convergence de la somme infinie de l'équation 3.3. La condition suivante :

$$|X(e^{j\Omega})| < \infty \quad \forall \Omega$$

doit être satisfaite, avec  $X(e^{j\Omega})$  la limite quand  $M \rightarrow \infty$  de la somme finie 3.12

$$X_M(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-M}^M x(n) e^{-jn\Omega} \quad (3.12)$$

Une condition suffisante peut être déterminée comme suit :

$$\begin{aligned} |X(e^{j\Omega})| &= \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jn\Omega} \right| \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| |e^{-jn\Omega}| \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \end{aligned}$$

Donc, si  $x(n)$  est *absolument sommable*, alors sa *TF*  $X(e^{j\Omega})$  existe. De plus, la série converge uniformément vers une fonction continue de  $\Omega$ . Comme une séquence (respectivement un système) stable est, par définition, absolument sommable, alors toute séquence stable (respectivement tout système stable) ont une transformée de Fourier (respectivement une réponse fréquentielle) continue et finie. Cette condition est donc également vérifiée pour les séquences de durée finie.

**Exemple 3.4 :** Soit le signal  $x(n) = a^n u(n)$ , déterminer la condition d'existence de sa *TF*  $X(e^{j\Omega})$ .

La condition *absolument sommable* est suffisante et garantit une convergence uniforme. Certaines séquences ne sont pas *absolument sommables* mais sont de *carré sommable* (ou à énergie finie), i.e.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty \quad (3.13)$$

Ces séquences peuvent être représentées par une transformée de Fourier mais sans convergence uniforme de la somme infinie définissant  $X(e^{j\Omega})$ . Dans ce cas, il y aura convergence des moindres carrés définie par :

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\Omega}) - X_M(e^{j\Omega})|^2 d\Omega = 0 \quad (3.14)$$

Cela signifie que l'erreur  $|X(e^{j\Omega}) - X_M(e^{j\Omega})|$  ne tend pas vers 0 quand  $M \rightarrow \infty$  mais que par contre l'énergie de l'erreur tend vers 0. L'exemple suivant illustre ce cas sur le phénomène de Gibbs.

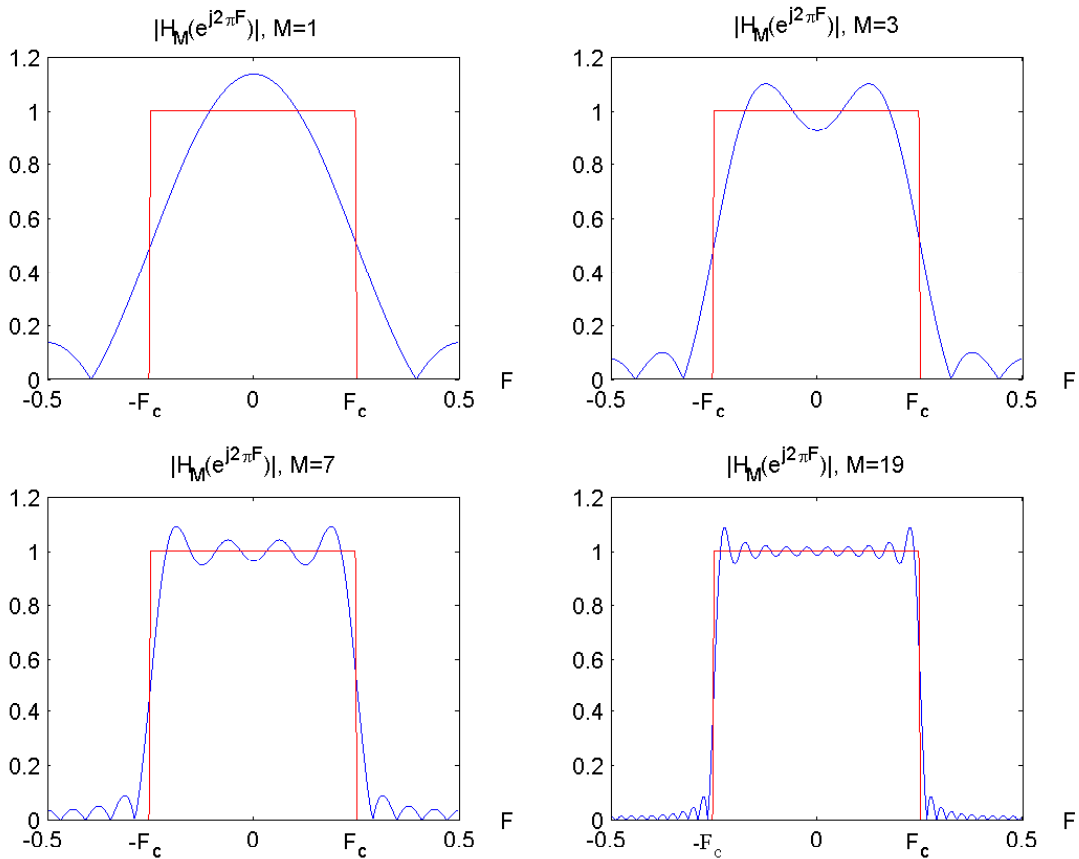


FIG. 3.2 – Mise en évidence du phénomène de Gibbs en  $\Omega = \Omega_c$ .  $H_M(e^{j\Omega})$  est représentée pour différentes valeurs de  $M$ .  $\Omega = 2\pi F$

Certaines séquences ne sont ni absolument sommables, ni de carré sommables. Cependant il est utile de pouvoir les représenter par leur transformée de Fourier. Le tableau 3.1 donne par exemple les *TF* des signaux :  $x(n) = 1$ ,  $x(n) = u(n)$ ,  $x(n) = e^{j\Omega_0 n}$ .

---

**Exemple 3.5 :** Phénomène de Gibbs sur un filtre passe bas idéal.

Soit le filtre passe-bas idéal de période  $2\pi$  défini par :

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_c \\ 0, & \Omega_c < |\Omega| \leq \pi \end{cases} \quad (3.15)$$

La réponse impulsionnelle peut être trouvée par *TF* inverse. On obtient :

$$h(n) = \frac{\sin n\Omega_c}{n\pi}, \quad -\infty < n < \infty. \quad (3.16)$$

$h(n)$  n'est pas un signal causal.  $h(n)$  n'est pas absolument sommable car  $H(e^{j\Omega})$  est discontinue en  $\Omega_c$ . Par conséquent, la somme infinie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin n\Omega_c}{n\pi} e^{-jn\Omega}$$

ne converge pas uniformément pour toutes les valeurs de  $\Omega$ . Soit la somme finie

$$H_M(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-M}^M \frac{\sin n\Omega_c}{n\pi} e^{-jn\Omega},$$

on peut facilement montrer que  $H_M(e^{j\Omega})$  s'exprime par :

$$H_M(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} \frac{\sin [(2M+1)(\Omega-\theta)/2]}{\sin [(\Omega-\theta)/2]} d\theta$$

La fonction  $H_M(e^{j\Omega})$  est représentée figure 3.2 pour différentes valeurs de  $M$ . On peut constater que, lorsque  $M$  augmente, les oscillations présentes à  $\Omega = \Omega_c$  (souvent appelées phénomène de Gibbs) sont plus rapides, mais leur amplitude ne décroît pas. En fait, il peut être démontré que lorsque  $M \rightarrow \infty$  l'amplitude maximale des oscillations ne tend pas vers zéro mais converge vers une amplitude localisée en  $\Omega = \Omega_c$ . Par conséquent, la somme infinie ne converge pas uniformément vers la fonction discontinue  $H(e^{j\Omega})$  de l'équation 3.15. Cependant,  $h(n)$  est de carré sommable et  $H_M(e^{j\Omega})$  converge au sens des moindres carrés vers  $H(e^{j\Omega})$ , i.e.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\Omega}) - H_M(e^{j\Omega})|^2 d\Omega = 0$$

Cependant, l'erreur entre  $\lim_{M \rightarrow \infty} H_M(e^{j\Omega})$  et  $H(e^{j\Omega})$  est importante dans ce cas. C'est l'effet de la troncature temporelle qui sera défini dans le cours de TNS en deuxième année.

---

### 3.5 Propriétés de la transformée de Fourier

Les principales propriétés de la  $TF$  sont énumérées ci dessous.

– Linéarité ou superposition

$$a.x(n) + b.y(n) \Leftrightarrow a.X(e^{j\Omega}) + b.Y(e^{j\Omega})$$

– Décalage en temps-fréquence

$$x(n - n_0) \Leftrightarrow e^{-jn_0\Omega} X(e^{j\Omega})$$

$$x(n)e^{jn\Omega_0} \Leftrightarrow X(e^{j(\Omega - \Omega_0)})$$

– Dérivation en fréquence

$$n.x(n) \Leftrightarrow j \frac{dX(e^{j\Omega})}{d\Omega}$$

– Produit de convolution

$$x_1(n) * x_2(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_1(i) * x_2(n - i) \Leftrightarrow X_1(e^{j\Omega}).X_2(e^{j\Omega})$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) * x_2(n) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\Omega}).X_2^*(e^{j\Omega})d\Omega$$

– Théorème du fenêtrage (ou de la modulation)

$$x_1(n).x_2(n) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\Theta}).X_2(e^{j(\Omega - \Theta)})d\Theta$$

– Théorème de Parseval (conservation de la puissance d'un signal)

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |x(i)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\Omega})|^2 d\Omega$$

– Propriétés de symétrie

$$x(n) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow X(e^{j\Omega}) = X^*(e^{-j\Omega})$$

Si  $x(n)$  est une suite réelle, alors sa TF est symétrique conjuguée. Cela implique que sa partie réelle et son module sont paires, et que sa partie imaginaire et sa phase sont impaires.

$$x(-n) \Leftrightarrow X(e^{-j\Omega})$$

$$x(-n) \Leftrightarrow X^*(e^{j\Omega}), \text{ si } x(n) \in \mathbb{R}$$

Le tableau 3.1 donne les transformées de Fourier des fonctions les plus utilisées en traitement du signal.  $T$  est la période d'échantillonnage.

$x(n)$	$X(e^{j\Omega})$
$\delta(n)$	1
$\delta(n - n_0)$	$e^{-j\Omega n_0}$
1	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega + 2\pi k)$
$u(n)$	$\frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\Omega + 2\pi k)$
$a^n u(n) \quad ( a  < 1)$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$
$(n + 1)a^n u(n) \quad ( a  < 1)$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\Omega})^2}$
$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$\frac{\sin(\Omega(N + 1)/2)}{\sin(\Omega/2)} e^{-j\Omega N/2}$
$\frac{\sin \Omega_c n}{\pi n}$	$X(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1 & \text{si }  \Omega  < \Omega_c \\ 0 & \text{si } \Omega_c <  \Omega  < \pi \end{cases}$
$e^{j\Omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0 + 2\pi k)$
$\cos(\Omega_0 n + \phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [\pi e^{-j\phi}\delta(\Omega + \Omega_0 + 2\pi k) + \pi e^{j\phi}\delta(\Omega - \Omega_0 + 2\pi k)]$
$\sin(\Omega_0 n + \phi)$	$j \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\pi e^{-j\phi}\delta(\Omega + \Omega_0 + 2\pi k) - \pi e^{j\phi}\delta(\Omega - \Omega_0 + 2\pi k)]$

TAB. 3.1 – Tables des principales transformées de Fourier



### 3.6 Densité spectrale d'énergie

Pour des signaux à énergie finie :  $E(\infty) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty$ , on définit la densité spectrale d'énergie par la relation :

$$S_E(f) = |X(e^{j2\pi fT})|^2 \quad (3.17)$$

### 3.7 Échantillonnage du domaine Fréquentiel

Pour un signal  $x(n)$  quelconque, sa Transformée de Fourier à Temps Discret (*TFTD*) est donnée à l'équation 3.3. On échantillonne maintenant la *TFTD* en  $N$  points fréquentiels, tels que :

$$X_k \triangleq X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$

Essayons maintenant de trouver la relation qu'il peut y avoir entre le signal  $x(n)$  et sa *TFD* définie par la séquence des nombres  $X_k$ . Pour cela, on découpe la somme infinie de l'équation précédente en blocs de  $N$  points et on effectue un changement de variable.

$$\begin{aligned} X_k &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=lN}^{lN+N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} x(n+lN)e^{-j\frac{2\pi k(n+lN)}{N}} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} x(n+lN)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n+lN)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \end{aligned}$$

On trouve donc :

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN) \right] e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$

Soit encore :

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \quad \text{où} \quad x_p(n) \triangleq \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN)$$

On constate donc par l'équation précédente que le signal  $x_p(n)$  est un signal *périodique*, et plus précisément :

$$x_p(n+N) = x_p(n)$$

Puisque le signal  $x_p(n)$  est périodique, il peut s'exprimer comme une série de Fourier. Il est donc possible de retrouver les échantillons  $x_p(n)$  à partir de la séquence  $X_k$  par une série de Fourier à temps discret :

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j \frac{2\pi k n}{N}} \quad \text{avec} \quad c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j \frac{2\pi k n}{N}}$$

En comparant les coefficients de la série de Fourier et ceux de la *TFTD*, on obtient :

$$c_k = \frac{1}{N} X_k$$

On obtient donc  $x_p(n)$  à partir des  $X_k$  selon la relation suivante :

$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j \frac{2\pi k n}{N}}$$

Il faut bien voir qu'il s'agit d'une relation entre  $x_p(n)$  et la séquence des  $X_k$ , il faut déterminer la relation entre  $x_p(n)$  et  $x(n)$ .

Cette relation s'interprète de la même manière que les versions répliquées du spectre d'un signal analogique lorsqu'on effectue un échantillonnage temporel de ce signal. Ici, le signal  $x_p(n)$  est une somme de répliques du signal "de base"  $x(n)$ . On observe alors le même problème de reconstruction que lors de la discrétisation de la variable temporelle, c'est-à-dire, si les échantillons se recouvrent entre deux séquences consécutives, on est en présence de recouvrement dit *temporel* ou *time aliasing*.

Il existe un cas particulier où les sommes décalées dans la construction de  $x_p(n)$  ne se recouvrent pas ; il s'agit des signaux à *temps limité*. On définit un signal à temps limité un signal  $x(n)$  de durée  $L$ , prenant des valeurs non nulles *seulement* dans l'intervalle  $[0 \cdots L-1]$ . Ainsi, si  $x(n)$  est un signal à temps limité de durée  $L$ , tel que  $N \geq L$ , il est possible de retrouver  $x(n)$  à partir de  $x_p(n)$  en isolant une séquence particulière :

$$x(n) = \begin{cases} x_p(n) & \text{si } 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puisqu'on a reconstruit le signal d'origine  $x(n)$  à partir de sa TFD, séquence des valeurs  $X_k$ , il n'est pas interdit maintenant de calculer par une *TFTD* le spectre de  $x(n)$  pour des fréquences *continues*,  $X(\omega)$ . Il existe une formule de passage directe entre les  $X_k$  et  $X(\omega)$ ,  $-\pi \leq \omega \leq \pi$  : il s'agit de la formule d'interpolation de Dirichlet.

### 3.8 Transformée de Fourier Discrète

Si un signal est défini par  $N$  échantillons temporels, la transformée de Fourier Discrète est une transformée qui opère sur  $N$  points fréquentiels définis par la série des pulsations suivantes :

$$\Omega_k = \frac{2\pi}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

La transformée de Fourier Discrète (*TFD*) d'un signal  $x(n)$  à temps limité de longueur  $N$  est donc définie par la relation suivante :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi k n}{N}}$$

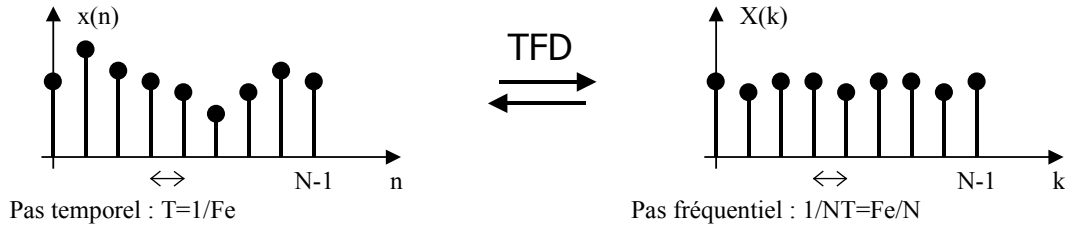


FIG. 3.3 – TFD d'un signal discret à durée limitée

La figure 3.3 illustre la relation entre les pas fréquentiels et temporels. Étant donnée la définition de  $N$  permettant une reconstruction du signal temporel par sa transformée inverse, on peut aussi écrire :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi kn}{N}}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (3.18)$$

On a la transformée de Fourier discrète inverse définie par :

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j \frac{2\pi kn}{N}}, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (3.19)$$

Les principales propriétés de la *TFD* sont énumérées ci dessous.

- Linéarité
- Décalage en temps-fréquence

$$x(n - n_0) \Leftrightarrow e^{-2j\pi \frac{kn_0}{N}} X(k)$$

- Produit de convolution circulaire

$$x_1(n) \otimes x_2(n) = \sum_{i=0}^{N-1} x_1(i) * x_2(n - i) \Leftrightarrow X_1(k) \cdot X_2(k)$$

avec  $x_1(n)$  et  $x_2(n)$  des signaux périodiques de période  $N$ .

- Théorème de Parseval (conservation de la puissance d'un signal)

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(i)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

- Propriétés de symétrie

$$x(n) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow X(k) = X^*(N - k)$$

Un autre intérêt de cette transformée réside dans un calcul d'une somme finie de termes qui peut être particulièrement efficace si  $N$  est une puissance de 2, (*Fast Fourier Transform, FFT*).

Il est possible de trouver la transformée de Fourier discrète d'un signal, en évaluant sa transformée en  $z$  sur le cercle unité, c'est-à-dire en prenant  $z = e^{j \frac{2\pi k}{N}}$ .

Il est aussi possible d'exprimer  $X(z)$  en fonction des  $X_k$ , on a :

$$X(z) = \frac{(1 - z^{-N})}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X_k}{1 - e^{-j\frac{2\pi k}{N}} z^{-1}}$$

On a considéré les propriétés précédentes en prenant comme hypothèse que  $x(n)$  est à temps limité. Soit maintenant un signal  $x(n)$  quelconque, qu'il soit à temps limité ou non, périodique ou aperiodique, on a alors les propriétés suivantes.

1. Pour un signal  $x(n)$  périodique de période  $N$ , les valeurs  $X(k)$  de la *TFD* sont les coefficients de la décomposition en série de Fourier du signal. La *TFD* est un calcul exact.
2. Pour un signal  $x(n)$  quelconque, on a :

$$x_p(n) = x(n), \quad \text{pour } n = 0, \dots, N - 1$$

Donc si on prend un signal à temps discret quelconque, on effectue une *TFD* sur  $N$  échantillons, puis une *TFD* inverse sur  $N$  points, on obtient exactement le signal d'origine pour l'intervalle  $0 \leq n \leq N - 1$ .

3. Si  $x(n)$  est à temps limité avec  $L \leq N$ , on a alors :

$$X_k = X(\Omega)|_{\Omega=\frac{2\pi k}{N}}$$

Si  $x(n)$  n'est pas à temps limité, il existe toujours une relation en le spectre discret et le spectre continu mais qu'il est difficile d'interpréter. Comme la plupart du temps, on souhaite interpréter directement les  $X_k$  comme des composantes fréquentielles du signal on se débrouillera pour ne pas traiter que des signaux à temps limité (fenêtrage).

La transformée de Fourier Discrète est un outil efficace permettant de calculer la Transformée de Fourier à temps discret d'un signal à temps limité  $x(n)$ . La Transformée de Fourier Discrète est souvent utilisée pour des opérations de filtrage sous une forme rapide.

# Chapitre 4

## Systemes discrets

### 4.1 Introduction

Un système à temps discret est un système qui transforme un signal d'entrée à temps discret, appelé signal d'excitation, en un signal de sortie à temps discret, appelé signal de réponse.

Un signal d'entrée  $e(n)$  est transformé en un signal de sortie  $s(n)$  :

$$s(\cdot) = \mathcal{T}[e(\cdot)]$$

Il faut comprendre la notation précédente comme la transformation de la séquence complète  $e(n)$ . On distingue les systèmes à temps discret *sans effet de mémoire* et les systèmes *dynamiques*. Un système à temps discret sans effet de mémoire est un système pour lequel un échantillon de sortie d'instant  $n$  ne dépend que de l'échantillon d'entrée du même instant. Dans tous les autres cas, il y a un effet de mémoire et le système est dit dynamique.

Les systèmes pour lesquels le comportement entre le signal d'entrée et le signal de sortie n'évolue pas en fonction du temps sont faciles à analyser. Un système est dit *invariant* en temps (ou au décalage) si et seulement si :

$$e(n) \xrightarrow{\mathcal{T}} s(n) \quad \Rightarrow \quad e(n-k) \xrightarrow{\mathcal{T}} s(n-k) \quad \forall e(\cdot), \quad \forall k \in (\mathbb{N})$$

Un système est *linéaire* si et seulement si :

$$\mathcal{T}[a \times e_1(n) + b \times e_2(n)] = a \times \mathcal{T}[e_1(n)] + b \times \mathcal{T}[e_2(n)] \quad \forall e_1(\cdot) \quad \forall e_2(\cdot) \quad \forall (a, b)$$

Un système linéaire conserve donc l'opérateur d'addition et de multiplication.

Un système est *causal* si la sortie  $s(n)$  à n'importe quel instant  $n$  dépend *seulement* des échantillons passés et de l'échantillon présent du signal d'entrée.

### 4.2 Systemes linéaires invariants

Il s'agit d'une classe de système largement utilisée en traitement du signal. On suppose un tel système *linéaire* et *invariant* dans le temps. L'hypothèse de linéarité conduit au principe de superposition dû à la conservation de l'opérateur d'addition par la transformation ; cette hypothèse simplifie grandement les études analytiques des systèmes numériques.

La stratégie générale d'analyse d'un système linéaire invariant est la suivante :

1. Décomposition du signal d'entrée en une somme de signaux ou fonctions de base.

$$e(n) = \sum_k \alpha_k e_k^b(n)$$

2. Etude de la réponse du système pour l'ensemble des fonctions de base.

$$s_k^b(n) = \mathcal{T}[e_k^b(n)]$$

3. Recomposition de la sortie en appliquant le principe de superposition.

$$s(n) = \sum_k \alpha_k s_k^b(n)$$

L'intérêt d'une telle approche est de s'appuyer sur un ensemble de fonctions de base possédant des caractéristiques intéressantes connues (fonction  $\delta(n)$  et l'exponentiel complexe par exemple).

#### 4.2.1 Représentation d'un signal

Appliquons le premier point énuméré précédemment en utilisant des signaux  $\delta$  comme fonction de base. Soit  $e(n)$  un signal numérique quelconque que l'on cherche à représenter uniquement avec un ensemble de fonctions  $\delta(n)$ .

Développons le signal  $e(n)$  :

$$e(n) = \dots, e(-2), e(-1), e(0), e(1), e(2) \dots$$

On rappelle que  $\delta(n)$  vaut 1 si  $n = 0$ , 0 sinon ; une somme de fonction  $\delta(n)$  qui ne se recouvre pas sur le même indice vaut soit 1, soit 0.

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} & \vdots = \vdots \\ e(-1) &= \dots + 0.e(-2) + 1.e(-1) + 0.e(0) + 0.e(1) + 0.e(2) + \dots \\ e(0) &= \dots + 0.e(-2) + 0.e(-1) + 1.e(0) + 0.e(1) + 0.e(2) + \dots \\ e(1) &= \dots + 0.e(-2) + 0.e(-1) + 0.e(0) + 1.e(1) + 0.e(2) + \dots \\ & \vdots = \vdots \end{aligned}$$

Le signal  $e(n)$  s'écrit alors :

$$e(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(k)\delta(n-k)$$

### 4.2.2 Système linéaire invariant

Soit maintenant un système linéaire (SL) transformant un signal d'entrée  $e(n)$  en un signal de sortie  $s(n)$  :

$$\begin{aligned} s(n) &= \mathcal{T}[e(n)] \\ s(n) &= \mathcal{T}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(k)\delta(n-k)\right] \\ s(n) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{T}[e(k)\delta(n-k)] \\ s(n) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(k)\mathcal{T}[\delta(n-k)] \end{aligned}$$

On pose :

$$h_k(n) = \mathcal{T}[\delta(n-k)]$$

En plus d'être linéaire, si le système est *invariant*,  $h_k(n)$  ne dépend plus de  $k$ , donc :

$$h(n) = \mathcal{T}[\delta(n)]$$

Pour un système linéaire invariant (SLI), on obtient alors la relation suivante entre signal d'entrée et de sortie :

$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(k)h(n-k)$$

Un système linéaire invariant est donc entièrement caractérisé par sa *réponse impulsionnelle*  $h(n)$ .

Cette opération d'accumulation de termes multiplicatifs porte le nom de *convolution* et se note  $*$ , on a :

$$s(n) = e(n) * h(n)$$

Par un simple changement de variable sous le signe somme, il est simple de montrer qu'il s'agit d'une opération commutative, on a :

$$s(n) = e(n) * h(n) = h(n) * e(n)$$

**Exemple 4.1 :** Exemple de convolution

Soit la réponse impulsionnelle  $h(n)$  d'un système linéaire invariant telle que :

$$h(n) = \begin{cases} a^n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

ou encore :

$$h(n) = a^n u(n)$$

Ce signal est représenté en haut de la figure 4.1.

Étudions la réponse d'un tel système à l'entrée suivante :

$$e(n) = u(n) - u(n - N) \text{ pour } N \text{ fixé}$$

On trouvera au milieu de la figure 4.1 une représentation de ce signal.

On peut distinguer 3 cas :

1. Pour  $n < 0$ ,  $h(n-k)$  et  $e(n)$  n'ont aucun échantillon non nuls en commun donc  $s(n) = 0$  pour  $n < 0$
2. Pour  $0 \leq n < N$ , on a un recouvrement d'échantillons non nuls pour  $0 \leq k < n$ , donc pour  $0 \leq n < N$  on obtient :

$$s(n) = \sum_{k=0}^n a^{n-k} = a^n \frac{1 - a^{-(n+1)}}{1 - a^{-1}}$$

3. Pour  $n \geq N$ , on a  $n$  recouvrements d'échantillons non nuls pour  $0 \leq k < N$ , donc pour  $n \geq N$  on a :

$$s(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a^{n-k} = a^n \frac{1 - a^{-N}}{1 - a^{-1}}$$

La réponse du système est représentée en bas de la figure 4.1.

**4.2.3 Stabilité**

Un système est stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée. Soit  $h(n)$  la réponse impulsionnelle d'un système linéaire invariant, la condition de stabilité d'un tel système s'écrit :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| < +\infty$$

Démonstration :

" $\Rightarrow$ " :

Soit un signal  $e(n)$  borné, c'est-à-dire :

$$\exists M < +\infty \quad \text{tq} \quad |e(n)| < M \quad \forall n$$



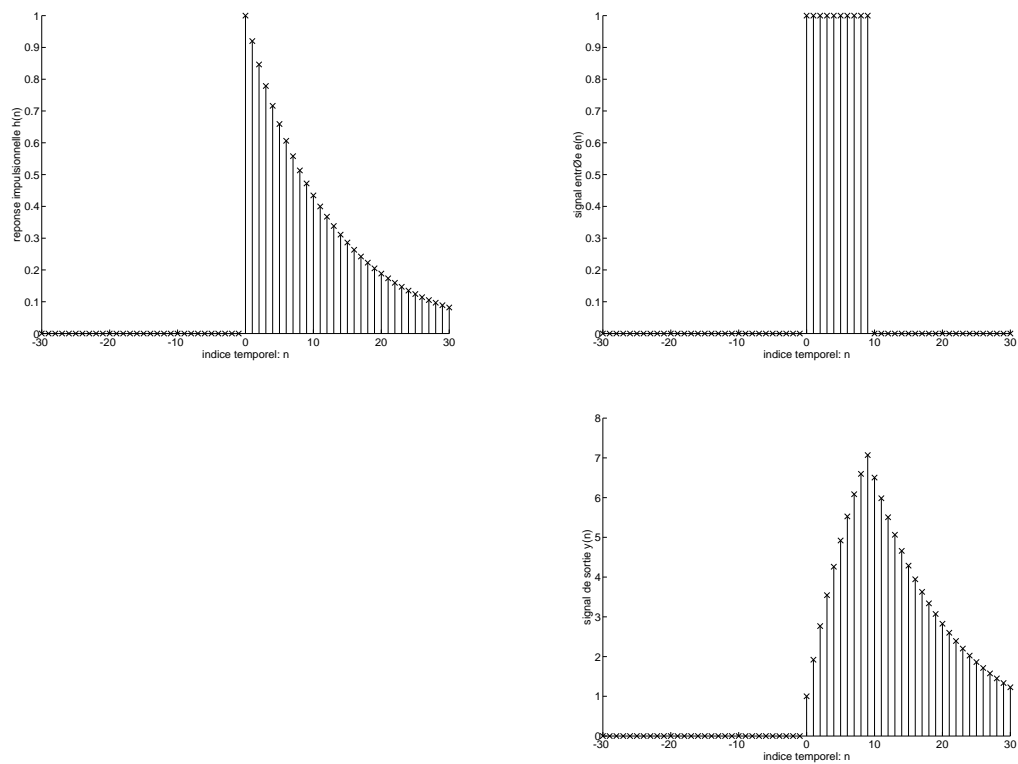


FIG. 4.1 – En haut à gauche, réponse impulsionnelle du système, au haut à droite entrée du système, en bas, signal de réponse du système à l'entrée

Par l'opération de convolution (2ème forme) on obtient :

$$|s(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e(n-k) \right|$$

En utilisant l'hypothèse d'une entrée bornée :

$$|s(n)| \leq M \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| < +\infty$$

" $\Leftarrow$ " :

Il suffit d'un contre-exemple pour valider ce sens de la démonstration. Soit la sortie d'un système linéaire invariant supposée bornée, on suppose de plus le système instable, on recherche alors une entrée bornée.

Soit l'entrée :

$$e(n) = \begin{cases} \frac{h^*(-n)}{|h(n)|} & \text{si } h(n) \neq 0 \\ 0 & \text{si } h(n) = 0 \end{cases}$$

Pour  $n = 0$  (un échantillon *contre exemple* suffit) on obtient :

$$s(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(-k)h(k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{h^*(k)h(k)}{|h(k)|}$$

$$s(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{|h(k)|^2}{|h(k)|} = +\infty$$

□

#### 4.2.4 Causalité

Un système est *causal* si un changement en sortie ne *précède* pas un changement en entrée. Soient deux signaux d'entrée  $e_1(n)$  et  $e_2(n)$  ainsi que leurs sorties respectives  $s_1(n)$  et  $s_2(n)$ , un système est causal si et seulement si  $\exists n_0$  tel que si  $e_1(n) = e_2(n)$  pour  $n < n_0$  alors  $s_1(n) = s_2(n)$  pour  $n < n_0$ .

Un système linéaire invariant est causal si et seulement si  $h(n) = 0$  pour  $n < 0$ .

Un séquence est *causale* si les échantillons de cette séquence sont nuls pour  $n < 0$ .

### 4.3 Représentation temporelle des systèmes discrets

#### 4.3.1 Produit de convolution

La section 4.2.2 a déjà montré que la sortie d'un système discret pouvait se formuler de la manière suivante :

$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(k)h(n-k) = e(n) * h(n) \quad (4.1)$$

$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e(n-k) = h(n) * e(n) \quad (4.2)$$

Un système discret est donc entièrement caractérisé par sa *réponse impulsionnelle*  $h(n)$ . L'opération  $*$  liant la sortie  $s(n)$  à l'entrée  $e(n)$  et à la réponse impulsionnelle du système  $h(n)$  est appelée produit de convolution.

### 4.3.2 Equation aux différences finies

Les équations de convolution développées au cours des paragraphes précédents font intervenir des sommes infinies de termes. Si la réponse impulsionnelle possède un nombre infini de termes il est difficilement envisageable de mettre en oeuvre cette convolution sur un ordinateur. Mais, il est cependant possible pour certaines classes de réponses impulsionnelles infinies de développer la convolution sous la forme d'une récursion. La relation entre l'entrée et la sortie est une combinaison linéaire à coefficients constants (et en nombre fini) des échantillons d'entrée et de sortie.

Une équation aux différences finies peut s'écrire sous la forme :

$$s(n) = - \sum_{k=1}^N a_k s(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k e(n-k)$$

Un système régi par une équation aux différences finies du type précédent est linéaire, invariant et causal. Si  $N \geq 1$  :

- un échantillon de sortie au temps  $n$ ,  $s(n)$  dépend des  $N$  précédents échantillons de sortie  $s(n-1) \cdots (n-N)$ ,
- un tel système est dit *récurif*,
- la réponse impulsionnelle est infinie, RII, ou IIR en anglais (Infinite Impulse Response).

Si  $N = 0$  :

- la sortie  $s(n)$  dépend seulement de l'entrée courante  $e(n)$  et de ses  $M$  échantillons précédents,
- le système est dit non-récurif,
- la réponse impulsionnelle est finie, RIF, ou FIR en anglais (Finite Impulse Response).

La réponse impulsionnelle d'un système RIF est donnée par :

$$h(n) = \sum_{k=0}^M b_k \delta(n-k)$$

c'est-à-dire par la séquence des  $\{b_k\}$ .

Puisque qu'étudier un système linéaire invariant revient à étudier sa réponse impulsionnelle, le cas particulier d'une réponse impulsionnelle mise sous la forme d'une équation aux différences finies consiste à étudier un système linéaire d'équations, c'est-à-dire à en extraire les racines du polynôme caractéristique. Ceci sera effectué de manière efficace en utilisant la transformée en  $Z$ .

### 4.3.3 Fonction de transfert

La fonction de transfert  $H(z)$  d'un système est définie par :

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} \quad (4.3)$$

$H(z)$  est également la transformée en  $Z$  de la réponse impulsionnelle  $h(n)$  du système.

### 4.3.3.1 Cas général

Dans le cas général,  $H(z)$  peut être obtenue à partir de l'équation aux différences (voir section 2.3.2). On a alors :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{N(z)}{D(z)} \quad (4.4)$$

En multipliant  $N(z)$  et  $D(z)$  par  $z^N$  on obtient :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{N-k}}{z^N + \sum_{k=1}^N a_k z^{N-k}} \quad (4.5)$$

ou en faisant apparaître les pôles et les zéros :

$$H(z) = b_0 z^{N-M} \frac{\prod_{i=1}^M (z - z_i)}{\prod_{i=1}^N (z - p_i)} = b_0 \frac{\prod_{i=1}^M (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - p_i) z^{-1}} \quad (4.6)$$

L'équation précédente permet de tracer dans le plan complexe le diagramme des pôles et des zéros.

### 4.3.3.2 Systèmes *tout zéros*

Un système *tout zéros* est un système dont la transformée en  $Z$  s'exprime sous la forme de l'équation (2.19) avec  $N = 0$ , c'est-à-dire pour lequel  $a_1 = a_2 = \dots = a_N = 0$ .

La fonction de transfert devient :

$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} = \frac{1}{z^M} \sum_{k=0}^M b_k z^{M-k}$$

Le polynôme numérateur possède  $M$  racines. La réponse impulsionnelle de ce système est de type finie (RIF ou FIR).

### 4.3.3.3 Systèmes *tout pôles*

Un système *tout pôles* est un système dont la transformée en  $z$  s'exprime sous la forme de l'équation (2.19) avec  $M = 0$ , c'est-à-dire pour lequel  $b_1 = b_2 = \dots = b_M = 0$ .

La fonction de transfert devient :

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{b_0 z^N}{\sum_{k=0}^M a_k z^{N-k}}$$

Le polynôme dénominateur possède  $N$  racines. La réponse impulsionnelle de ce système est de type infinie (RII ou IIR).

## 4.4 Analyse des systèmes discrets par la transformée en $Z$

L'objet de ce paragraphe est d'étudier le comportement des systèmes linéaires invariants par l'analyse de leur fonction de transfert décrite par une fonction en  $Z$ . Il s'agit donc de caractériser la sortie d'un système en fonction d'une entrée et de spécifier les conditions de stabilité d'un tel système.

### 4.4.1 Réponse d'un système décrit par une fonction rationnelle

Soit le système décrit par l'équation suivante :

$$S(z) = H(z)E(z)$$

Il s'agit de caractériser  $s(n)$ . On suppose que  $H(z)$  peut s'écrire sous la forme d'une fraction de polynômes en  $z$ , c'est-à-dire :

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

On suppose de plus que la transformée de l'entrée du système  $E(z)$  s'écrit par une fraction de polynômes :

$$E(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

On a donc :

$$S(z) = \frac{N(z)P(z)}{D(z)Q(z)}$$

Le signal de sortie est donc caractérisé par une transformée rationnelle.

Supposons :

- les pôles du système sont uniques,  $p_1 \cdots p_N$ ,
- les pôles de l'entrée sont uniques,  $q_1 \cdots q_L$ ,
- les pôles du système et de l'entrée sont différents,
- les zéros du système et de l'entrée diffèrent de l'ensemble des pôles.

On peut alors écrire  $Y(z)$  sous la forme suivante :

$$S(z) = \sum_{k=1}^N \frac{D_k}{1 - p_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^L \frac{Q_k}{1 - q_k z^{-1}}$$

En supposant un système causal, on obtient :

$$s(n) = \sum_{k=1}^N D_k p_k^n u(n) + \sum_{k=1}^L Q_k q_k^n u(n)$$

L'équation précédente montre que le signal de sortie peut être considéré comme composé de deux parties :

- une réponse en régime naturel (termes en  $p_k$ )
- une réponse en régime forcé (termes en  $q_k$ )

#### 4.4.2 Régimes transitoires et permanents

On considère  $s_n(n)$  la réponse du système en régime naturel :

$$s_n(n) = \sum_{k=1}^N D_k p_k^n u(n)$$

et  $s_f(n)$  en régime forcé :

$$s_f(n) = \sum_{k=1}^L Q_k q_k^n u(n)$$

Si tous les pôles de la fonctions de transfert du systèmes ont des amplitudes inférieures à 1, alors le régime naturel est dit *transitoire*. Des pôles de faible module conduisent à une décroissance rapide de la réponse naturelle. Réciproquement des pôles proches du cercle unité conduisent à une réponse transitoire longue.

Si tous les pôles du signal d'entrée ont un module inférieur à 1, alors la réponse forcé décroît vers 0 pour n allant vers l'infini. Si le signal d'entrée a un pôle sur le cercle unité, alors le signal est composé d'une sinusoïde persistante. Dans un tel cas, la réponse forcée correspond à ce que l'on appelle un état stable.

#### 4.4.3 Condition de causalité pour $H(z)$

Au cours du chapitre caractérisant les systèmes à temps discret, on a vu qu'un système linéaire invariant est causal ssi sa réponse impulsionnelle  $h(n)$  est nulle si  $n < 0$ .

Un système linéaire invariant est causal si et seulement si le domaine de convergence de sa transformée en  $z$  est *l'extérieur* d'un cercle de rayon  $r < \infty$  incluant  $z = \infty$ . Ainsi,  $H(z) = z^2$  a une région de convergence :  $\mathbb{C} - \infty$  qui est extérieur à un cercle de rayon 0 mais excluant  $z = \infty$ . Donc le système est non causal.

#### 4.4.4 Condition de stabilité pour $H(z)$

On a vu que pour qu'un système linéaire invariant soit stable il faut et il suffit que sa réponse impulsionnelle vérifie :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Un système linéaire invariant est stable si le domaine de convergence de sa transformée en  $z$  inclue le cercle unité.

Pour finir, un système linéaire invariant causal est **stable si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert sont à l'intérieur, strictement, du cercle unité.**

#### 4.4.5 Détermination du module et de la phase du système

Pour un système dont le domaine de convergence de sa fonction de transfert  $X(z)$  contient le cercle unité, alors la réponse fréquentielle de ce système consiste à évaluer  $X(z)$  sur le cercle unité, c'est-à-dire pour  $z = e^{j\Omega}$ .

**Exemple 4.2 :** Prenons par exemple, un système dont la fonction de transfert s'exprime sous la forme suivante :

$$H(z) = \frac{1}{1 + 0.5z^{-1}}$$

on a :

$$H(z) = \frac{z}{z + 0.5}$$

Ce système possède donc un zéro en  $z = 0$  et un pôle en  $z = -\frac{1}{2}$ .

En prenant  $z$  sur le cercle unité :

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} + \frac{1}{2}}$$

En précisant explicitement amplitude et phase :

$$H(e^{j\Omega}) = |H(e^{j\Omega})|e^{j\arg(H(e^{j\Omega}))}$$

On obtient alors :

$$|H(e^{j\Omega})| = \frac{1}{e^{j\Omega} + \frac{1}{2}} \quad (4.7)$$

$$\arg(H(e^{j\Omega})) = \Omega - \arg(e^{j\Omega} + \frac{1}{2}) \quad (4.8)$$

la double figure 4.2 représente sur sa partie gauche la position des pôles et des zéros de la fonction de transfert (un pôle est indiqué par le symbole x, et un zéro par le symbole o) et sur sa partie droite la réponse fréquentielle du système : module et phase pour  $0 \leq \Omega \leq \pi$ .

L'évolution du module de la réponse fréquentielle nous montre qu'il-y-a atténuation des contributions dues au basses fréquences par rapport aux hautes fréquences. Le comportement de ce système est donc celui d'un filtre passe-haut.

## 4.5 Représentation fréquentielle des systèmes discrets

Au cours du paragraphe précédent, nous avons vu que les systèmes linéaires invariants ont des propriétés, notamment le principe de superposition, qui conduisent à des solutions analytiques simples. Si on applique une sinusoïde à l'entrée d'un système LI la sortie est elle aussi sinusoïdale et de même pulsation. Les amplitudes et phases dépendent par contre des caractéristiques du système. Il est donc possible d'analyser le comportement d'un système linéaire invariant par l'observation de l'évolution des paramètres d'une série de sinusoïdes. C'est cette propriété qui rend si intéressante l'utilisation de la transformée de Fourier pour l'étude des systèmes LI.

Soit l'entrée  $e(n) = e^{jn\omega T} = e^{jn\Omega}$  pour  $-\infty < n < +\infty$  d'un système linéaire invariant de

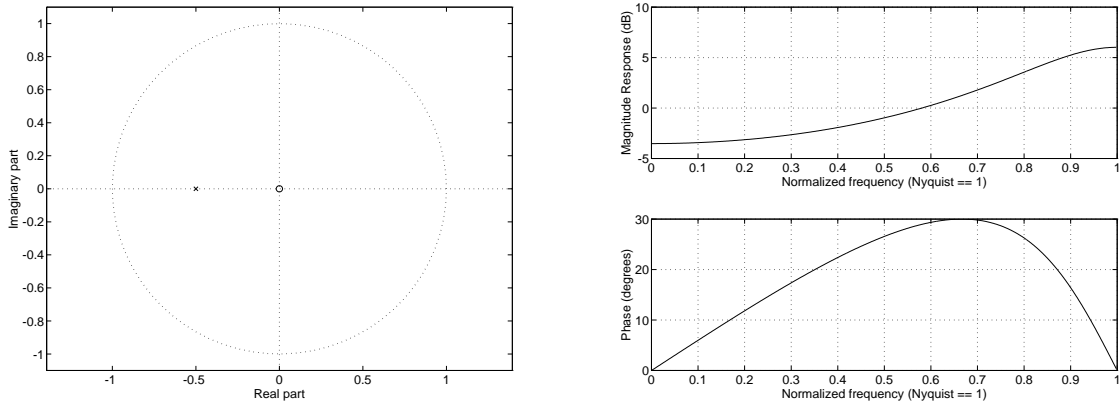


FIG. 4.2 – Réponse fréquentielle,  $X(z) = \frac{1}{1+0.5z^{-1}}$

réponse impulsionnelle  $h(k)$ . La sortie peut alors s'écrire :

$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{j(n-k)\Omega}$$

$$s(n) = e^{jn\Omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-jk\Omega}$$

En posant :

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-jk\Omega}$$

L'équation précédente représente la modification apportée par le système et modélisée par une amplitude complexe.

$H(e^{j\Omega})$  est appelé *réponse fréquentielle* du système caractérisé par sa réponse impulsionnelle  $h(k)$ . Il s'agit d'un terme complexe qui peut s'exprimer par une partie réelle ou imaginaire ; on adopte le plus souvent une représentation de type polaire où l'on fait référence au module et à la phase de cette réponse fréquentielle :

$$H(e^{j\Omega}) = |H(e^{j\Omega})|e^{j\arg[H(e^{j\Omega})]}$$

La définition de la réponse fréquentielle d'un système linéaire invariant montre qu'il s'agit d'une fonction périodique de période  $2\pi$ . Cela veut dire qu'à deux entrées identiques mais à une pulsation double le système répond d'une manière identique. Puisque  $H(e^{j\Omega})$  est une fonction périodique, elle peut être représentée par une série de Fourier. En fait l'équation de définition fait apparaître  $H(e^{j\Omega})$  comme une série de Fourier où les coefficients sont  $h(k)$ .



## Chapitre 5

# Échantillonnage et reconstruction des signaux

Ce chapitre présente l'opération d'échantillonnage des signaux à temps continu permettant de représenter des signaux physiques analogiques sur une forme à temps discret. On abordera cette notion en étudiant tout d'abord le cas d'un échantillonnage idéal où les échantillons du signal à temps discret sont dérivés du signal analogique à des instants périodiques multiples d'une période élémentaire. Comme la notion d'instant a peu de sens en pratique et qu'il est plus juste de parler de durée, on abordera ensuite le cas d'un système d'échantillonnage réel, tel qu'on peut en trouver dans des convertisseurs analogique/numérique ; on précisera quelles approximations permettent de se ramener au cas de l'échantillonneur idéal.

L'opération d'échantillonnage inverse consiste à reconstruire un signal analogique à partir d'un signal à temps discret. On étudiera un modèle de reconstruction du signal tel que l'opération complète échantillonnage et reconstruction soit transparente.

### 5.1 Échantillonnage idéal

Soit un signal analogique  $x_a(t)$  dont la transformée de Fourier est définie par :

$$X_a(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-j\omega t} dt$$

avec  $\omega = 2\pi f$ .

On retrouve le signal temporel à partir de sa transformée par la transformée de Fourier inverse définie par la relation suivante :

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

Un signal à temps discret  $x(n)$  dérivé d'un signal analogique  $x_a(t)$  consiste à prendre des valeurs de  $x_a(t)$  à des instants multiples d'une période fixe  $T$ .  $T$  est appelée *période d'échantillonnage*. On a donc :

$$x(n) = x_a(t = nT)$$

L'inverse de la période d'échantillonnage est appelée *fréquence d'échantillonnage*,  $f_e$  ; on a  $f_e = \frac{1}{T}$ . On notera  $\omega$ , la pulsation non normalisée s'exprimant en radian par seconde. On notera  $\Omega$ , la pulsation normalisée, s'exprimant en radian par période. On a  $\omega = \frac{\Omega}{T}$ .

Pour se rendre compte de la relation qu'il y a entre  $x(n)$  et  $x_a(n)$ , il est utile de relier les transformées de Fourier de ces deux signaux.

On a :

$$x(n) = x_a(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\omega) e^{j\omega nT} d\omega$$

A partir de la définition de la transformée de Fourier à temps discret, on a aussi :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(j\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

Pour pouvoir relier les deux équations précédentes (par  $x(n) \dots$ ), on exprime la première en découpant l'intervalle d'intégration par morceaux, on a donc :

$$x_a(nT) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(2k-1)\frac{\pi}{T}}^{(2k+1)\frac{\pi}{T}} X_a(j\omega) e^{j\omega nT} d\omega$$

Par un changement de variable, on obtient :

$$x_a(nT) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X_a(j\omega + j\frac{2\pi k}{T}) e^{j\omega nT} e^{2\pi k n} d\omega$$

On peut noter que  $e^{2\pi k n} = 1$  pour toutes valeurs entières de  $k$  et de  $n$ . En échangeant le signe somme et le signe intégral, on obtient :

$$x(n) = x_a(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\omega + j\frac{2\pi k}{T}) \right] e^{j\omega nT} d\omega$$

En remplaçant  $\omega$  par  $\frac{\Omega}{T}$ , on a :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(\frac{j\Omega}{T} + \frac{j2\pi k}{T}\right) \right] e^{j\Omega n} d\Omega$$

Il est donc maintenant aisée d'effectuer l'identification suivante :

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(\frac{j\Omega}{T} + \frac{j2\pi k}{T}\right)$$

La relation précédente montre que le spectre du signal numérique est *périodique* et correspond à des versions décalées du spectre du signal analogique correspondant.

### 5.1.0.1 Théorème d'échantillonnage de Shannon

Le spectre du signal numérique est composé d'une somme infinie de versions décalées du signal analogique. Il est donc possible de retrouver le signal à temps continu si tous les éléments sommés ne se recouvrent pas.

Si le signal analogique est à bande limitée, c'est-à-dire si sa transformée de Fourier à temps continu  $X(\omega)$  est nulle pour  $|\omega| > \omega_{\max}$ , il n'y a pas recouvrement des spectres décalés pour  $\omega_{\max} < \frac{2\pi}{T} - \omega_{\max}$ .

On obtient alors :

$$\omega_{\max} < \frac{2\pi}{T} - \omega_{\max} \quad (5.1)$$

$$\omega_{\max} < \frac{\pi}{T} \quad (5.2)$$

$$2 \frac{\omega_{\max}}{2\pi} < \frac{1}{T} \quad (5.3)$$

$$2f_{\max} < f_N \quad \text{avec} \quad f_N = \frac{1}{T} \quad (5.4)$$

$f_N$  est la fréquence limite d'échantillonnage ou encore appelée fréquence de Nyquist. Il est donc tout d'abord s'assurer que l'on échantillonne bien un signal continu à bande limitée. Ceci est le plus souvent validé par le filtrage du signal analogique par un filtre passe-bas. Une fois la bande de base fixée, on détermine la fréquence d'échantillonnage à appliquer pour obtenir une reconstruction parfaite du signal continu à partir du signal numérique.

## 5.2 Exemple pratique d'échantillonnage

Soit un signal analogique  $x_a(t)$  correspondant à une sinusoïde de fréquence  $f = 0.5\text{Hz}$  et défini par :

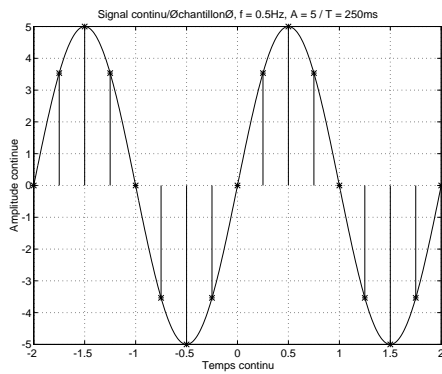
$$x_a(t) = 5 \sin(2\pi 0.5t) \quad \text{avec} \quad -2 \leq t \leq +2$$

D'après le paragraphe précédent, la fréquence de Nyquist correspond à  $f_N = 2 * 0.5 = 1\text{Hz}$ . On prend pour fréquence d'échantillonnage  $f_s = 4\text{Hz}$ , soit  $x(n)$  le signal à temps discret résultant de l'échantillonnage de  $x_a(t)$  à la fréquence  $f_s$ .

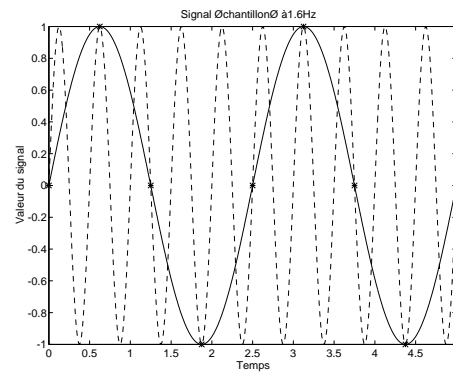
La figure 5.2.a montre en trait continu la signal analogique que l'on vient échantillonné en certains instants repérés par des lignes verticales terminées par des croix.

La série des figures 5.2.b à 5.2.d met en évidence les problèmes de reconstruction si on ne respecte pas la contrainte du théorème de Shannon. Le signal analogique d'origine est une sinusoïde de 2 Hz. Donc une fréquence d'échantillonnage valide devra être supérieure à 4 Hz. Les figures 5.2.b et 5.2.c montrent en trait pointillé le signal analogique d'origine, en trait plein le signal analogique reconstruit à partir du signal numérique noté par la séquence des points-étoiles. On voit que le signal reconstruit n'a plus rien à voir avec le signal d'origine. En effet la fréquence d'échantillonnage est inférieure à celle de Nyquist (4 Hz).

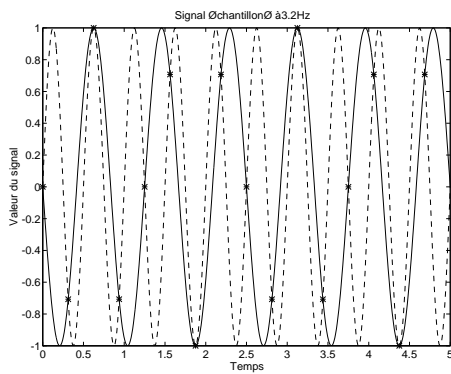
En utilisant les mêmes notations que pour les deux figures précédentes, on peut remarquer qu'il y a reconstruction parfaite pour la figure 5.2.d, il s'agit en fait du signal numérique échantillonné à une fréquence de 6.4 Hz. On peut aussi noter que si on ne regarde que l'enveloppe d'amplitude du signal numérique (séquence des étoiles), elle a peu de chose à voir avec une sinusoïde, du moins à l'oeil!...donc méfiance.



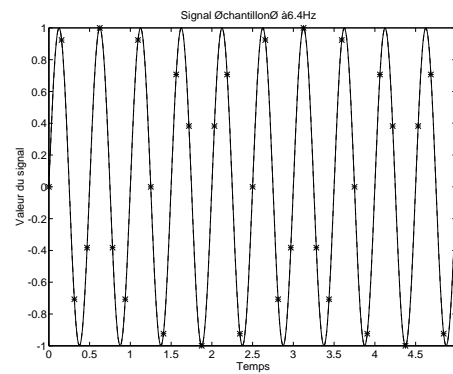
a. Échantillonnage d'un signal continu ; en trait continu le signal analogique, les traits verticaux notent les valeurs du signal numérique.



b. Échantillonnage d'un signal continu et reconstruction imparfaite ; en trait discontinu le signal analogique d'origine ( $F = 2Hz$ ), en trait plein le signal analogique reconstruit,  $F_s = 1.6Hz$ .



c. Échantillonnage d'un signal continu et reconstruction imparfaite,  $F_s = 3.2Hz$ .



d. Échantillonnage d'un signal continu et reconstruction parfaite,  $F_s = 6.4Hz$ .

## Chapitre 6

# Travaux Dirigés en signaux et systèmes discrets

### 6.1 Échantillonnage

#### 6.1.1 Chaîne de traitement numérique du signal

On s'intéresse à une chaîne de traitement numérique du signal (TNS) du type de la figure 6.1.



FIG. 6.1 – Chaîne de TNS

Le signal  $x(t) = A.e^{-at}.sin(\omega_0.t).u(t)$  correspondant à une réponse transitoire d'un système oscillant amorti est échantillonné à une période  $T_e$  qui permette de limiter le recouvrement spectral.

1. Calculer la TF  $X(f)$  de ce signal.
2. Tracer le module du spectre  $|X(f)|$  de ce signal, et précisez le lieu du maximum  $F_{max}$ , ainsi que sa valeur (A.N.  $\omega_0 = 2\pi 4rad/s$ ;  $a = 7$ ;  $A = 20$ ).
3. Ce spectre présente un support de durée infinie (à démontrer). Calculer et dessiner le spectre de  $x * (t)$  pour une période  $T_e$  quelconque.
4. Pour limiter l'effet de recouvrement spectral, on choisit de considérer la partie utile de  $x(t)$  sur un support borné. Ainsi, toute composante spectrale dont l'amplitude ne dépasse pas 1% de l'amplitude maximale  $F_{max}$  du spectre sera considérée comme négligeable. Calculer la fréquence  $F_M$  au delà de laquelle l'amplitude des raies devient négligeable.
5. Calculer  $F_e$  telle que le recouvrement n'entraîne une erreur sur le spectre initial ne dépassant pas 1% de l'amplitude du spectre en  $F_M$ .
6. Existe-t-il d'autres solutions qui permettent de limiter le recouvrement spectral.

### 6.1.2 Échantillonnage d'un signal

1. Soit le signal  $x(t) = e^{-at} \cdot u(t)$ , calculez et dessinez sa transformée de Fourier  $X(\omega)$ . On donnera les valeurs du modules en  $\omega = 0, a, 10a$ .
2. Calculez l'énergie du signal  $x(t)$ .
3. On échantillonne  $x(t)$  à une période  $T$ . Calculez la transformée de Fourier  $X_e(\omega)$  du signal échantillonné  $x_e(nT)$ .
4. Dessinez approximativement le module du spectre lorsque  $T = \pi/10a$ . Expliquez quels problèmes peuvent survenir lors de l'échantillonnage du signal  $x(t)$ .
5. Donner l'expression de l'énergie en fonction de la bande de fréquence  $[-B, \dots + B]$  considérée. On rappelle que la primitive de  $1/(1+x^2)$  est  $\arctg(x)$ . Trouver  $B$  donnant 90% de l'énergie totale du signal. Proposez, à partir de ces résultats, une solution pour limiter l'effet de l'échantillonnage en considérant qu'une bande de fréquence représentant 90% de l'énergie du signal suffit à caractériser le signal.

### 6.1.3 Échantillonnage idéal

Considérons l'opération d'échantillonnage idéal du signal  $x(t)$  à la fréquence d'échantillonnage  $f_e = 1/T$ . Soit  $x^*(t)$  le signal ainsi obtenu.

Calculer la transformée de Laplace  $X^*(p)$  de  $x^*(t)$  en considérant que  $x^*(t)$  est obtenu par un produit entre  $x(t)$  et un peigne de Dirac.

En déduire l'expression de la TF du signal échantillonné ainsi obtenu.

Dans le cas où le signal  $x(t)$  possède un support spectral non-borné, il est impossible de reconstituer  $x(t)$  à partir de la seule connaissance du signal discret  $x(nT)$ .

Discuter du phénomène de repliement spectral dans le cas où le signal  $x(t)$  possède un support spectral borné ( $f_{\max} < 1/2T, f_{\max} = 1/2T, f_{\max} > 1/2T$ ).

### 6.1.4 Échantillonnage naturel ou avec blocage

En pratique l'échantillonnage idéal est irréalisable, on parle alors d'échantillonnage naturel lorsque  $x_N(t) = x(t) \cdot \text{Rect}(\Theta/T)$ , ou d'échantillonnage avec blocage (d'ordre zéro) lorsque  $x_B(t) = x^*(t) * \text{Rect}(t - \frac{\Theta}{2})$ . Comparer  $X^*(f)$  par rapport aux spectres  $X_N^*(f)$  et  $X_B^*(f)$ .

### 6.1.5 Reconstitution

Pour reconstruire le signal à partir de la connaissance du seul signal échantillonné  $x^*(t)$ , il est possible d'utiliser des filtres extrapolateurs (ou polynomiaux) qui effectuent une extrapolation à partir de chaque impulsion d'échantillonnage à partir du développement en série de Taylor de  $x(t)$  au voisinage de  $t = nT$ , soit :  $x(nT + \tau) = x(nT) + \tau x'(nT) + \frac{\tau^2}{2!} x''(nT) + \dots$

Dans le cas d'un bloqueur d'ordre 0, seul le premier terme de cette série est utilisé. Déterminer la réponse en fréquence du filtre extrapolateur ainsi obtenu et donner la réponse en fréquence du signal après reconstitution.

Pour améliorer la reconstitution, il est possible d'éliminer par filtrage passe-bas les spectres dupliqués autour des fréquences  $k f_e, k \in \mathbb{N}^*$ .

Calculer l'ordre  $n$  du filtre passe-bas nécessaire afin d'obtenir une atténuation (maximale) de  $A_{\max} = 1$  dB à la fréquence maximale  $f_{\max}$  de  $x(t)$ , et une atténuation minimale de  $A_{\min} = 43$  dB à la fréquence  $f_e - f_{\max}$ .

Sachant que la fréquence d'échantillonnage  $f_e$  est égale à  $4f_{\max}$ , et que la fréquence de coupure  $f_c$  du filtre passe-bas est égale à  $2f_{\max}$ .

## 6.2 Transformée en $Z$

### 6.2.1 Calculs de $TZ$

1. Soit le signal :  $h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  échantillonné à une période  $T = 0.2s$ .

Dessiner le signal discret  $h(nT)$ . Déterminer l'expression de  $H(z)$ .

2. A partir de la transformée de Laplace des signaux continus suivants, déterminer les expressions de la  $TZ$  des signaux discrets équivalents, échantillonnés à la période  $T$  :

$$X(p) = \frac{1}{p} + \frac{3}{p^2}$$

$$X(p) = \frac{2}{p+2} + \frac{d}{dp} \left[ \frac{1}{p+1} \right]$$

3. Déterminer les expressions de la  $TZ$  et calculer les rayons de convergence des suites :

$$x(n) = 2(1+j)u(n) - 5(2-3j)u(n-1)$$

$$x(n) = k r^n \cos(n\omega_0 + \theta)u(n) \quad \text{A.N. : } r=2, k=4$$

$$x(n) = r^n \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} u(n)$$

Tracer le diagramme des pôles et des zéros.

4. Établir l'expression de la  $TZ$  de :

$$- x_1(n) = u(n) - u(n-N)$$

$$- x_2(n) = nx_1(n)$$

### 6.2.2 Signal exponentiel

Soit le signal :  $x(nT) = \begin{cases} A e^{-bnT} & \text{si } 0 \leq nT \leq \theta \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$  avec  $b > 0$ .

1. Déterminer transformée en  $Z$  du signal  $x(nT)$ .

## 6.3 Transformée en $Z$ inverse

1. Donner les expressions de la  $TZI$  de :

$$X(z) = \frac{z^3 + 2z^2 + z + 1}{(z-2)^2(z+3)}$$

$$X(z) = \frac{3z^2 + 0.5z}{z^2 - z + 0.5}$$

$$X(z) = \frac{4(z-3)}{z(z-1)(z-2)^2}$$

- par la méthode des résidus,
- par division polynômiale  $n = 0, 1, 2, 3$ ,
- par décomposition en fractions rationnelles.

Calculer  $x(n)$  pour  $n = 0, 1, 2, \dots, 7$ .

2. Donner les expressions de la *TZI* de :

$$X(z) = \frac{1}{(1 - az^{-1})(1 - bz^{-1})}$$

- par la méthode des résidus,
- par décomposition en fractions rationnelles.

Montrer que lorsque  $a = 0.5(1 + j)$  et  $b = 0.5(1 - j)$  alors

$$x(n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} \cos\left[(n-1)\frac{\pi}{4}\right] u(n)$$

### 6.3.1 Systèmes linéaires discrets

Soit le SLD suivant :

$$s(n) = b_1.s(n-1) + b_2.s(n-2) + e(n)$$

déterminer sa fonction de transfert en  $z$ .

Si  $b_1 = 0.5$  et  $b_2 = -0.24$ , le SLD est-il stable ?

Donner dans ce cas sa réponse impulsionnelle.

### 6.3.2 Filtre numérique

Soit le filtre analogique de fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{3.25}{(p+1)((p+0.5)^2+3)}$$

1. Déterminez la réponse impulsionnelle  $h(t)$  de ce filtre.
2. Déterminez ensuite la fonction de transfert en  $z$  d'un SLD de réponse impulsionnelle  $h(nT) = h(t)|_{t=nT}$ .

## 6.4 Transformée de Fourier d'un signal discret

1. Donner la définition de la transformée de Fourier  $X(e^{j\Omega})$  des signaux à temps discrets de la suite :

$$x(n) \quad n = -\infty, \dots, +\infty$$

Quel est le lien avec la transformée en  $Z$  ?

2. Montrer que la transformée de Fourier est périodique de période  $2\pi$ . Elle peut donc être décomposée en série de Fourier, calculer les coefficients de la série de Fourier en fonction de  $X(e^{j\Omega})$ .



3. La densité spectrale d'énergie de la suite  $x(n)$  est définie par  $S_E(f) = |X(e^{j2\pi fT})|^2$ . Calculer l'énergie moyenne

$$E = \int_{-1/2}^{1/2} S(\mathcal{F}) d\mathcal{F}$$

avec  $\mathcal{F}$  la fréquence normalisée telle que :  $\mathcal{F} = fT = \frac{\Omega}{2\pi}$ .

En déduire la relation de Parseval pour les signaux à temps discrets.

4. Donner les autres relations de la Transformée de Fourier directe et inverse en faisant intervenir la fréquence en Hertz, sachant que :  $x(n) \equiv x(nT)$ .
5. Calculer la  $TF$  de la fenêtre de pondération rectangulaire définie par :

$$x(n) = \begin{cases} 1 & n = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Tracer son  $|X(\mathcal{F})|$  et  $\text{Arg}(\mathcal{F})$  en fonction de la fréquence normalisée.

#### 6.4.1 Calcul de $TF$

- Déterminer la  $TF$  du signal décrit dans l'exercice 6.2.2.
- Donner la  $TF$  du signal suivant (appelé fenêtre de Hamming,  $\alpha = 0.54$ ) :

$$w_H(n) = \begin{cases} \alpha + (1 - \alpha) \cos \frac{2\pi n}{N-1} & \text{pour } |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

#### 6.4.2 Transformée de Fourier Discrète

- Donner la définition de la transformée de Fourier Discrète ou TFD (suivant la fréquence normalisée) des signaux à temps discrets de la suite :

$$x(n) \quad n = 0, \dots, N-1$$

Quel est le lien avec la transformée de l'exercice 6.4 ? avec la transformée en  $Z$  ?

A partir de la relation de transformée de Fourier inverse établie à l'exercice 6.4, établir la relation de transformée de Fourier Discrète inverse.

Donner les autres relations de la Transformée de Fourier Discrète directe et inverse en faisant intervenir la fréquence en Hertz.

- On périodise le signal décrit dans l'exercice 6.2.2 selon une période  $T_s > \theta$ . On posera  $T = T_s/N$  ( $\theta = T_s/2$ ).

Déterminer la Transformée de Fourier Discrète du signal périodique.

- Donner la TFD sur  $N$  points de  $x(n) = (-1)^n u(n)$ .
- Donner la TFD sur  $N$  points de  $x(n) = r^n e^{jn\omega_0} u(n)$ .
- Donner la TFD sur  $N$  points de  $x(n) = A e^{j2\pi k_1 n} u(n)$ .

On rappelle que

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1 - q^N}{1 - q}$$

## 6.5 Analyse spectrale

### 6.5.1 Exercice 1

On considère le signal à temps continu  $x(t) = A a^{-bt} u(t)$ ,  $0 < a < 1$  dont la transformée de Fourier est donnée par :  $X(f) = A/(b |\ln a| + j2\pi f)$ .

Considérons la version discrétisée de ce signal tel que  $t = nT$  et  $b = 1/T$ .

- Donner l'expression de la transformée en  $z$  :  $X(z)$ .
- En déduire sa transformée de Fourier  $X(e^{j2\pi f})$  exprimée en fonction de la fréquence normalisée ou non. Comparer ce résultat avec celui du signal à temps continu.
- On pondère le signal  $x(nT)$  par une fenêtre rectangulaire  $w(nT) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$
- Donner l'expression de  $X_N(z)$ , la transformée en  $z$  de ce signal.
- Donner l'expression de la transformée de Fourier discrète  $X(e^{j2\pi k f_N})$  avec  $f_N = 1/NT$ .
- Comparer à  $X(e^{j2\pi f})$  : préciser les conditions pour que la TFD soit une bonne approximation de la TF du signal discret  $x(n)$   $n = -\infty, \dots, +\infty$ .

### 6.5.2 Exercice 2

On considère le signal à temps continu  $x(t) = e^{-at} u(t)$ .

- Calculer sa transformée de Fourier. Donner les expressions mathématiques de son module et de son argument. Tracer le module en fonction de la fréquence.
- On discrétise le signal  $x(t)$  tel que  $t = nT$ . Donner l'expression de la transformée en  $z$  :  $X(z)$ . En déduire sa transformée de Fourier  $X(e^{j2\pi f})$ .
- Le signal  $x(nT)$  est maintenant tronqué à l'intervalle  $[0, (N-1)T]$  en pondérant le signal.

$$x(nT) \text{ par } w(nT) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Calculer la transformée en  $Z$  de ce signal.

Donner l'expression de la transformée de Fourier  $X(e^{j2\pi f})$ . Retrouver ce résultat en considérant que le signal discret tronqué correspond à la multiplication du signal discret de la question 2, par une fenêtre rectangulaire de  $N$  échantillons.

Calculer la transformée de Fourier Discrète  $X(e^{j2\pi f_k})$ .

Comparer ce dernier résultat à l'expression obtenue pour la transformée de Fourier. Préciser la condition pour que la TFD soit une bonne approximation de la TF.

- Quelles sont les différentes opérations (dans le domaine temporel et fréquentiel) permettant de passer de la TF du signal continu  $x(t)$  à la TFD de  $x(nT)$ .
- Montrer que l'on retrouve les mêmes résultats que précédemment (pour  $X(e^{j2\pi f})$  et  $X(e^{j2\pi f_k})$ ) si l'on tronque directement le signal  $x(t)$  par la fenêtre suivante  $w(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq (N-1)T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

Comparer ces résultats aux courbes données dans les figures 6.5.2.

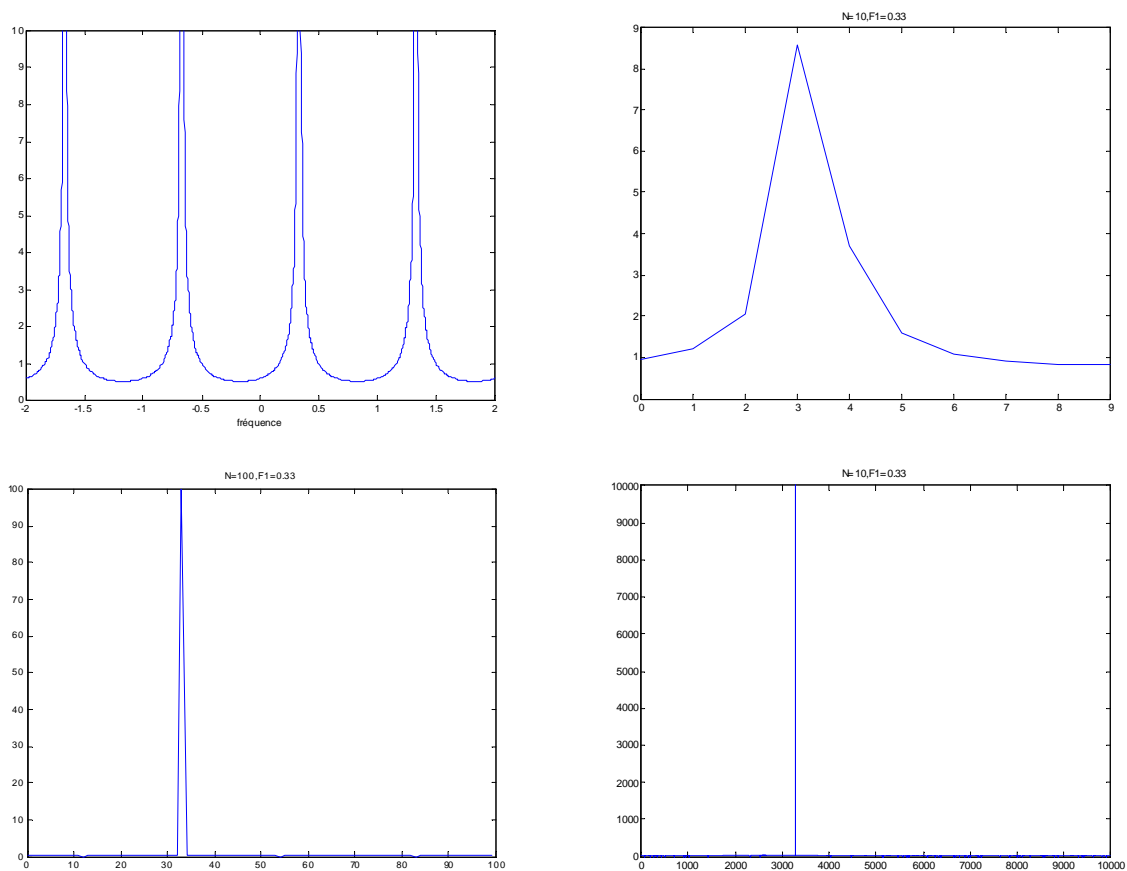


FIG. 6.2 – Exemples de calcul de TFD sur des signaux